VANNSON

Équation et propriétés de la loxodromie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 31-41

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__31_0>

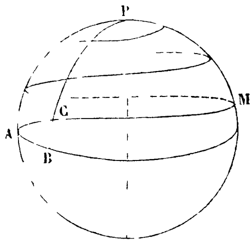
ÉQUATION ET PROPRIÉTES DE LA LOXODROMIE ;

PAR M. VANNSON,
Professeur au lycee de Versailles.

On appelle ainsi une courbe qui coupe tous les méridiens sous un angle constant. C'est la courbe que décrit un vaisseau quand il suit le même rumb de vent, autrement dit, tant que la direction de l'aiguille de la boussole ne varie pas (*).

Pour trouver son équation, soit C un point du lieu;

FIG. 1.



x sa longitude AB; y sa distance polaire PC; m la cotangente de l'angle constant PCM, nous avons trouvé la formule

$$\text{tang PCM} = -\frac{\sin y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad \text{(t. XVII, p. 66)},$$

d'où l'on tire

$$m\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin y},$$

(*) La force motrice de la vapeur ayant remplace celle du vent, on fait suivre aujourd'hui aux bâtiments la ligne geodésique et non la ligne loxodromique.

ou

$$-\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = -\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tang\frac{y}{2}};$$

or le premier membre est la dérivée de x, fonction de y, et le deuxième membre ayant au numérateur la dérivée du dénominateur, représente la dérivée de $\log\tang\frac{y}{2}$: les fonctions dont les deux membres sont les dérivées ne peuvent donc différer que par une constante, et l'on a

$$mx = -\log\tang\frac{y}{2} + C.$$

Si

$$x = 0, \quad y = 6$$

sont les coordonnées du point où la courbe coupe le méridien pris pour axe, on aura

$$C = \log\tang\frac{6}{2};$$

et la courbe aura pour équation

$$mx = -\log\frac{\tang\frac{y}{2}}{\tang\frac{6}{2}}.$$

Si elle passe à l'origine, $\frac{6}{2} = \frac{\pi}{4}$, et l'on a

$$mx = -\log\tang\frac{y}{2};$$

d'où

$$\tang\frac{y}{2} = e^{-mx}.$$

Si, comme vérification, on se demande ce que devient cette équation quand le rayon de la sphère est infini, il faut d'abord remplacer y par, $\frac{\pi}{2} - y'$, y' désignant la latitude; il vient alors

$$\begin{aligned} - mx &= - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \\ &= \log\left(1 - \frac{\operatorname{tang} y}{2}\right) - \log\left(1 + \frac{\operatorname{tang} y}{2}\right). \end{aligned}$$

Si l'on développe ces deux logarithmes en séries jusqu'à $\operatorname{tang}\frac{y}{2}$, première puissance, les autres termes devant disparaître à la limite, on trouve

$$y = + mx,$$

résultat évident à priori.

Revenons à l'équation

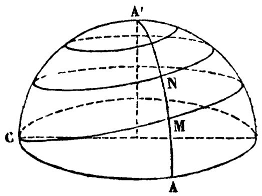
$$\operatorname{tang}\frac{y}{2} = e^{-mx};$$

m étant supposé positif, on voit que si x varie depuis o jusqu'à ∞, y ira constamment en diminuant et tendra vers la limite o. La courbe décrira donc une infinité de spires, en se rapprochant sans cesse du pôle, qui sera pour elle un point asymptote, propriété connue de la spirale logarithmique.

Si l'on donne à la longitude une série de valeurs en progression arithmétique, les tangentes des demi-distances polaires correspondantes formeront une progression géométrique.

Si l'on prend successivement pour longitudes o, π, 2π, 3π, 4π, ..., $h\pi$, on pourra aisément, par la formule tang $(a - b)$ calculer les tangentes successives des arcs compris sur le premier méridien entre deux spires consécutives, et reconnaître que ces arcs vont en décroissant à mesure que la longitude augmente. Plus généralement on dira : Si, pour une longitude donnée x, on calcule le segment de méridien correspondant compris entre

FIG. 2.



deux spires consécutives, on trouvera que ce segment diminue à mesure que la longitude augmente. En effet, la distance polaire d'un point m de la courbe est donnée par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{A'M}{2} = a^x$$

en posant

$$a = e^{-m}.$$

Soit N l'intersection du demi-méridien AA' avec la spire suivante, il faudra à x ajouter 2π, et l'on aura ainsi

$$\operatorname{tang} \frac{A'N}{2} = a^{x+2\pi};$$

par suite,

$$\operatorname{tang} \frac{mn}{2} = \frac{a^x(1 - a^{2\pi})}{1 + a^{2x+2\pi}},$$

a étant < 1. Si l'on prend la dérivée de cette fonction de x, on la trouve négative ; donc le segment mn va constamment en décroissant. C. Q. F. D.

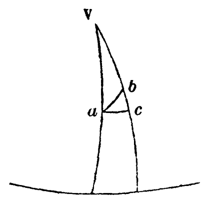
Rectification de la loxodromie.

On peut employer pour cette question la formule trouvée plus haut,

$$dS = \sqrt{dy^2\, dx^2 + \sin^2 y},$$

y étant la distance polaire d'un point a ; mais on a trouvé,

Fig. 3.



au commencement du présent article,

$$dx = -\frac{dy}{m \sin y},$$

ce qui donne

$$\frac{dS}{dy} = -\frac{1}{\cos\varphi} + C.$$

(φ étant l'angle vab). Si on calcule la constante de manière que $S = 0$ quand $y = 6$, on trouvera

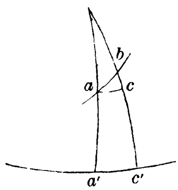
$$S = \frac{6 - y}{\cos\varphi}.$$

Ainsi l'arc compris entre deux points de la courbe est égal à la différence de leurs latitudes, divisée par le cosinus de l'angle constant que fait la direction du chemin parcouru avec les méridiens. Mais on arrive plus simplement encore à ce résultat en considérant le triangle infiniment petit abc comme rectiligne et rectangle, ce qui donne

$$ab = \frac{bc}{\cos\varphi};$$

cette relation ayant lieu pour chaque élément infiniment

Fig. 4.



petit de la courbe, a lieu pour un arc quelconque. Si donc, en restant sous le même rumb de vent, un vaisseau a parcouru un arc ab et qu'on connaisse les latitudes ou les distances polaires aux points de départ et d'arrivée, on aura facilement le chemin parcouru; pour achever de connaître le point d'arrivée, il faut aussi calculer la différence des longitudes des deux points; elle se déduit facilement de l'équation de la courbe et on trouve

$$\Delta = m\left(\log\operatorname{tang}\frac{y'}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{y}{2}\right);$$

il suffit donc de prendre les logarithmes des tangentes des demi-distances polaires, d'en faire la différence, et de la multiplier par la cotangente de l'angle constant.

Problème. *Trouver l'équation d'un loxodromie passant par un point ou par deux points donnés.*

Nous avons trouvé

$$(1)\qquad mx = -\left(\log\operatorname{tang}\frac{y}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{6}{2}\right);$$

soient x', y' les coordonnées du point donné, on aura

$$mx' = -\left(\log \text{tang} \frac{y'}{2} - \log \text{tang} \frac{\beta}{2}\right);$$

divisant membre à membre, il vient

$$(2) \qquad \frac{x}{x'} = \frac{\log \text{tang} \frac{y}{2} - \log \text{tang} \frac{\beta}{2}}{\log \text{tang} \frac{y'}{2} - \log \text{tang} \frac{\beta}{2}}.$$

Telle est l'équation d'une loxodromie passant par un point donné $(x'\ y')$. C'est la distance polaire du point où la courbe coupe le premier méridien, elle peut être calculée de manière que la courbe passe par un second point $(x''\ y'')$; on trouve aisément cette équation

$$\frac{x}{x'} = \frac{\left(\log \text{tang} \frac{y}{2}\right)(x'' - x') - \left(x'' \log \text{tang} \frac{y'}{2} - x' \log \text{tang} \frac{y''}{2}\right)}{\left(\log \text{tang} \frac{y'}{2}\right)(x'' - x') - \left(x'' \log \text{tang} \frac{y'}{2} - x' \log \text{tang} \frac{y'}{2}\right)}.$$

Telle est l'équation d'une loxodromie passant par deux points donnés. Si on veut connaître l'angle sous lequel la courbe coupe tous les méridiens, on tirera $\log \text{tang} \frac{\beta}{2}$ de l'équation (2) après y avoir remplacé y et x par y'', x'', ensuite on remplacera $\log \text{tang} \frac{\beta}{2}$ par la valeur trouvée dans l'équation (1), après y avoir mis x', y' en place de x et y. On trouve ainsi

$$m = \log \text{tang} \frac{\frac{y'}{2} - \log \text{tang} \frac{y''}{2}}{x'' - x}.$$

Remarque. Ayant trouvé

$$\text{tang} \frac{y}{2} = e^{-mx},$$

si on cherche tang y, on obtient la formule

$$\text{tang}\,y = \frac{2\,e^{-mx}}{1 - e^{-2mx}}.$$

Si donc on nomme Y la latitude du point, on aura

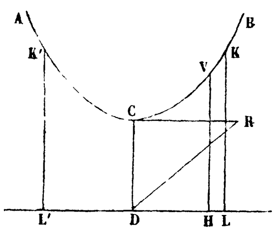
$$\text{tang}\,Y = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2};$$

on trouve de même

$$\text{coséc}\,y = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2},$$

formules identiques à celles qui donnent la longueur du fil et l'ordonnée dans l'équation de la chaînette (voir *Mécanique* de Poisson, t. I^er^, p. 561). Soit C le point le plus

Fig. 5.



bas d'un fil flexible ACB.... Si sur la verticale CD on porte une longueur h convenable, on a KL ou

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

et la longueur CK ou

$$S = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Supposons $h = \text{tang}\,\varphi$, φ étant l'angle constant de la loxodromie, et supposons aussi $x = h$, on peut donner à x toute autre valeur; dans les deux formules on aura

$$y = \frac{h}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \quad \text{et} \quad S = \frac{h}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

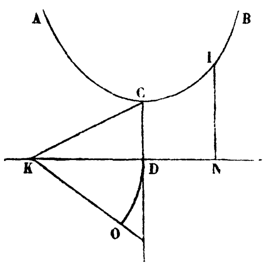
Pour $x = -h$ on a les mêmes résultats, abstraction faite du signe de S. Si donc on prend

$$DL = DL' = DC = \tang \varphi,$$

si on élève en L, L' deux verticales LK, L'K' égales à la valeur $\frac{h}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$, si à ces points K, K' on fixe les extrémités d'un fil flexible dont la longueur soit égale à $h\left(e - \frac{1}{e}\right)$, cette courbe pourra donner la latitude d'un point de la loxodromie correspondante à une longitude donnée x; on prendra DH égal à l'arc x développé, on mènera l'ordonnée HV. On construira le triangle rectangle DCR ayant DR = HV, l'angle ODR représentera la latitude cherchée (*).

Il ne faut voir dans cette remarque qu'un simple rapprochement entre les deux courbes, et non un procédé pratique de construction.

Fig. 6.



Toutefois si la chaînette était une fois construite, elle

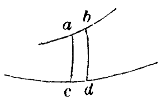
(*) Le côté CR sera égal à la longueur du fil de C en V.

pourrait être employée à la solution, quel que fût l'angle φ; car on peut toujours représenter sa tangente par CD, en choisissant l'unité convenablement. Si on fait en C l'angle DCK égal à $90^\circ - \varphi$, CD sera la tangente de φ, le rayon étant KD; si donc on fait en K l'angle DKO égal à la longitude donnée, qu'on décrive l'arc DO en prenant K pour centre, l'arc DO sera celui dont il faudra porter la longueur de D en N pour que l'ordonnée NI, divisée par CO, représente la latitude demandée.

Quadrature de la loxodromie.

En appelant du un élément de la surface $abcd$, nous

FIG. 7.



avons trouvé $du = dx \cos y$, y étant la distance polaire du point a; mais on a

$$dx = -\frac{dy}{m \sin y},$$

d'où

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\cos y}{m \sin y};$$

ces deux dérivées étant égales, on en tire

$$u = -\frac{1}{m} \log \sin y,$$

en supposant $u = 0$ quand $y = \frac{\pi}{2}$. Pour avoir u en fonction de x, on se reportera à l'équation de la courbe qui est

$$\text{tang}\,\frac{y}{2} = a^x,$$

d'où

$$\sin y = \frac{2\,a^x}{1 + a^{2x}},$$

ainsi

$$u = -\,\frac{1}{m}\log\frac{2\,a^x}{1 + a^{2x}}.$$

Pour avoir la surface comprise entre l'équateur et la première spire, on fera $x = 2a$, d'où

$$u' = -\frac{1}{m}\log\left(\frac{2a^{2\pi}}{1 + a^{4\pi}}\right).$$

Pour la surface comprise entre la première et la seconde spire, il faut faire $x = 4\pi$ et soustraire le premier résultat du second, ce qui donne

$$u_2 - u_1 = -\,\frac{1}{m}\log\frac{a^{2\pi}\left(1 + a^{4\pi}\right)}{1 + a^{8\pi}}.$$

Il est facile de démontrer que cette surface est moindre que la première, et en général que la surface comprise entre deux spires consécutives diminue à mesure que la courbe se rapproche du pôle.

La suite prochainement.