CUENOUD

Solution de la question 574

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 314-319

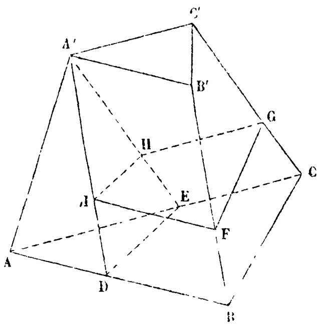
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__314_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 574

(voir page 113);

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

(L'énoncé renferme une faute d'impression dans la



phrase. « paraboloïde décrit par la droite B'C se mouvant, etc.; » il faut lire B'C'.)

Je pose

$$AB = c, \quad A'B' = c', \quad AC = b, \quad A'C' = b',$$
$$\text{Angle } BAC = A.$$

Il faut démontrer que l'on a

$$\left.\begin{array}{r}\text{vol. du}\\ \text{pentaèdre}\end{array}\right\} = \frac{1}{6} h \sin A \left[c\left(b + \frac{1}{2} b'\right) + c'\left(b' + \frac{1}{2} b\right)\right].$$

Les arêtes AB et A′B′ sont évidemment parallèles, ainsi que AC et A′C′, en sorte que l'angle $B'A'C' = BAC = A$.

Je mène le plan A′DE parallèle aux deux directrices BB′ et CC′ du paraboloïde. Il coupe les faces ABB′A′ et ACC′A′ suivant les droites A′D et A′E respectivement parallèles à BB′ et CC′. Ce plan décompose le pentaèdre en deux parties, la pyramide triangulaire A′ADE et l'hexaèdre A′DEBCB′C′. J'évalue séparément les volumes de ces deux parties.

$$\text{vol. pyramide } A'ADE = \frac{1}{3}h.\ \text{surf } ADE,$$

$$\text{Surf } ADE = \frac{1}{2} AD.AE.\sin A = \frac{1}{2}(c-c')(b-b')\sin A,$$

d'où

$$(1)\qquad \text{vol. pyramide } AA'DE = \frac{1}{6}h.\sin A(b-b')(c-c').$$

Pour calculer le volume de l'hexaèdre, je partage la hauteur h en un grand nombre de parties égales et je mène par chaque point de division un plan parallèle aux bases ABC, A′B′C′, plan qui coupe le paraboloïde suivant l'une de ses génératrices rectilignes, telle que FG, et l'hexaèdre suivant un quadrilatère tel que IFGH. En construisant sur chacune de ces sections un prisme limité à la section suivante, on aura

$$\text{vol. de l'hexaèdre} = \text{lim. somme des prismes},$$

le nombre des parties en lesquelles on divise la hauteur devenant infiniment grand.

Je désigne par θh l'une des parties de la hauteur, par n le nombre de ces parties et par a_p l'aire de la section IFGH qui passe par le $p^{ième}$ point de division de la hauteur à partir de la base supérieure.

J'ai

$$2\,a_p = \mathrm{IF}\,.\,\mathrm{GH}\sin(\mathrm{IF}.\mathrm{GH}) + \mathrm{IF}.\mathrm{IH}\sin(\mathrm{IF}.\mathrm{IH}) + \mathrm{IH}.\mathrm{HG}\sin(\mathrm{IH}.\mathrm{HG}).$$

Or

$$\mathrm{IF} = c', \quad \mathrm{GH} = b',$$
$$\sin(\mathrm{IF}.\mathrm{GH}) = \sin\mathrm{A},$$
$$\sin(\mathrm{IF}.\mathrm{IH}) = \sin\mathrm{BDE},$$
$$\sin(\mathrm{IH}.\mathrm{HG}) = \sin\mathrm{DEC},$$

d'où

$$2\,a_p = b'c'\sin\mathrm{A} + \mathrm{IH}(c'\sin\mathrm{BDE} + b'\sin\mathrm{DEC}).$$

Les triangles semblables A'IH, A'DE donnent

$$\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{A'I}}{\mathrm{A'D}} = \frac{p}{n},$$

d'où

$$\mathrm{IH} = p\,.\,\frac{\mathrm{DE}}{n},$$

et conséquemment

$$2\,a_p = b'c'\sin\mathrm{A} + p\,.\,\frac{\mathrm{DE}}{n}(c'\sin\mathrm{BDE} + b'\sin\mathrm{DEC}).$$

Le triangle ADE donne

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DE}} = \frac{\sin\mathrm{BDE}}{\sin\mathrm{A}}$$

et

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\sin\mathrm{DEC}}{\sin\mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{DE}\sin\mathrm{DEC} = \mathrm{AD}\sin\mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{DE}\sin\mathrm{BDE} = \mathrm{AE}\sin\mathrm{A},$$

ou

$$\mathrm{DE}\sin\mathrm{DEC} = (c - c')\sin\mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{DE}.\sin\mathrm{BDE} = (b - b')\sin\mathrm{A}.$$

Ces valeurs étant introduites dans la valeur de a_p donnent

$$2a_p = b'c'\sin\mathrm{A} + \frac{p}{n}[c'(b - b')\sin\mathrm{A} + b'(c - c')\sin\mathrm{A}]$$

ou

$$2a_p = \sin\mathrm{A}\left\{b'c' + \frac{p}{n}[c'(b - b') + b'(c - c')]\right\}.$$

Le volume du prisme très-mince qui a pour base a_p et pour hauteur θh est

$$\frac{1}{2}\theta h.\sin\mathrm{A}\left\{b'c' + \frac{p}{n}[c'(b - b') + b'(c - c')]\right\}.$$

En faisant varier p dans cette expression de 1 à n et faisant la somme des résultats obtenus, j'obtiens

$$\begin{aligned}\text{somme des prismes} &= \frac{1}{2}\theta h\,.\,\sin\mathrm{A}\left\{n.b'c' + \frac{n(n+1)}{2.n}\right.\\ &\qquad \left.\times[c'(b - b') + b'(c - c')]\right\}\\ &= \frac{1}{2}n.\theta h.\,\sin\mathrm{A}\left\{b'c' + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right.\\ &\qquad \left.\times[c'(b - b') + b'(c - c')]\right\}.\end{aligned}$$

Remplaçant $n\,.\,\theta h$ par h et passant à la limite, je trouve :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}\text{vol. de}\\ \text{l'hexaèdre}\end{array}\right\} &= \frac{1}{2}h\sin\mathrm{A}\left[b' + \frac{1}{2}(bc' - b'c' + b'c - b'c')\right]\\ &= \frac{1}{4}h.\sin\mathrm{A}\,(bc' + b'c).\end{aligned}\right.$$

Je fais la somme des volumes (1) et (2) et je trouve

$$\left.\begin{array}{r}\text{vol. du}\\ \text{pentaèdre}\end{array}\right\}= h \sin A \left[\frac{1}{6}(b - b')(c - c') + \frac{1}{4}(bc' + b'c\right]$$

$$= \frac{1}{6} h . \sin A \left(bc + b'c' + \frac{1}{2} bc' + \frac{1}{2} b'c\right)$$

$$= \frac{1}{6} h \sin A \left[c\left(b + \frac{1}{2} b'\right) + c'\left(b' + \frac{1}{2} b\right]\right..$$

Le résultat précédent pourrait aussi se mettre sous la forme

$$\frac{1}{6} h \sin A \left[b\left(c + \frac{1}{2} c'\right) + b'\left(c' + \frac{1}{2} c\right)\right].$$

La question 5 du *Mathematical Monthly* me paraît inexacte. En effet, si je calcule le coefficient angulaire de la tangente pour chacune des courbes, ellipse et trajectoire, j'obtiens

$$\text{pour l'ellipse.......} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by},$$

$$\text{pour la trajectoire...} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cxy}.$$

Désignant par V l'angle des deux tangentes en l'un des points communs aux deux courbes, j'ai

$$\tang V = \frac{-\dfrac{ax}{by} + \dfrac{1}{cxy}}{1 + \dfrac{ax}{bcxy^2}} = \frac{by - acx^2y}{ax + bcxy^2} = \frac{y}{x} \times \frac{b - acx^2}{a + bcy^2}.$$

Je remplace by^2 par $1 - ax^2$, et je trouve

$$\operatorname{tang} V = \frac{y\,(b - acx^2)}{x.(a + c - acx^2)} = \frac{y}{x} \times \frac{b - acx^2}{b + 2c - acx^2},$$

résultat qui n'est pas égal à $\frac{x}{y}$.

On pourrait obtenir un énoncé analogue à celui reproduit dans les *Annales* en changeant l'équation

$$x = Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

contre

$$x = Ce^{\frac{cy^2}{2}}$$

et en remplaçant les mots « dont la tangente est $\frac{x}{y}$ » par « dont la tangente est $-\frac{y}{x}$ ».