Nouvelles annales de mathématiques

Housel

Détermination des éléments d'un paraboloïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 305-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__305_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UN PARABOLOIDE;

PAR M. HOUSEL,
Professeur

Étant donnée l'équation d'une surface du second degré rapportée à des axes quelconques et même obliques, on sait trouver tous les éléments de cette surface si elle a un centre. Nous allons résoudre le même problème pour un paraboloïde, question qui n'a pas encore été, à ce que nous croyons, traitée jusqu'à présent d'une manière complète.

I. Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz \\ \qquad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0 \end{array}\right.$$

l'équation d'une surface quelconque du second degré; soient μ et ν les coefficients angulaires d'un de ses axes principaux, on a

$$(2)\quad \begin{cases} S = \dfrac{A\mu + B''\nu + B'}{\mu + \nu\cos xy + \cos xz} = \dfrac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \mu\cos xy + \cos yz} \\ \qquad = \dfrac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu\cos xz + \nu\cos yz}. \end{cases}$$

Mais, pour l'axe diamétral d'un paraboloïde, $S = 0$; donc

$$(3)\quad \begin{cases} A\mu + B''\nu + B' = 0, \\ A'\nu + B + B''\mu = 0, \\ A'' + B\nu + B'\mu = 0. \end{cases}$$

On en tire

$$\mu = \frac{A'B' - BB''}{B''^2 - AA'}, \quad \nu = \frac{AB - B'B''}{B''^2 - AA'},$$

ainsi que la relation connue

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

qui donne aussi

$$(4)\qquad (AB - B'B'')^2 = (B'^2 - AA'')(B''^2 - AA'),$$

avec deux autres relations analogues.

On en conclut que le dénominateur des valeurs de μ et de ν peut toujours être supposé différent de zéro, car l'on supposera, en changeant, s'il le faut, x en y ou en z, et réciproquement, que $B''^2 - AA'$ est celle des trois quantités $B^2 - A'A''$, $B'^2 - AA''$, $B''^2 - AA'$ qui n'est pas nulle. En effet, si toutes trois étaient nulles, l'équation (4) et les relations analogues prouvent que l'on aurait aussi

$$AB - B'B'' = 0, \quad A'B' - BB'' = 0, \quad A''B'' - BB' = 0:$$

alors on reconnaît que la surface dégénérerait en cylindre.

L'équation (4) montre en passant que ces trois quantités sont généralement de même signe, puisque le produit de deux d'entre elles est un carré.

II. Soient x', y', z' les coordonnées du sommet, le plan tangent en ce point est perpendiculaire à l'axe diamétral; on a donc

$$\frac{Ax' + B''y' + B'z' + C}{h} = \frac{A'y' + B''x' + Bz' + C'}{h'}$$
$$= \frac{A''z' + B'x' + By' + C''}{h''},$$

relations dans lesquelles

$$h = \mu + \nu \cos xy + \cos xz,$$
$$h' = \nu + \mu \cos xy + \cos yz,$$
$$h'' = 1 + \mu \cos xz + \nu \cos yz.$$

Soit ρ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &Ax' + B''y' + B'z' + C = \rho h,\\ &A'y' + B''x' + Bz' + C' = \rho h',\\ &A''z' + B'x' + By' + C'' = \rho h''.\end{aligned}\right.$$

Multiplions la première de ces égalités par μ, la seconde par ν, et ajoutons-les toutes trois, il reste

$$C\mu + C'\nu + C'' = \rho(h\mu + h'\nu + h'')$$

et

$$\rho = \frac{C\mu + C'\nu + C''}{1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos xy + 2\mu \cos xz + 2\nu \cos yz},$$

quantité connue et finie, car elle a pour dénominateur le carré de la diagonale du parallélipipède formé en prenant sur les axes des x, des y et des z les quantités μ, ν, et 1.

De plus ρ n'est jamais nul ; autrement les équations (5) deviendraient celles qui donnent le centre : comme il n'y a pas de centre unique, la surface en aurait une infinité et serait un cylindre.

Comme rien n'indique encore que le point représenté par x', x', z' soit sur la surface, les équations (5) se réduisent aux deux premières, qui donnent

$$x'(B''^2 - AA') + z'(BB'' - A'B') = \rho(B''h' - A'h) + A'C - B''C',$$

$$y'(B''^2 - AA') + z'(B'B'' - AB) = \rho(B''h - Ah') + AC' - B''B.$$

En divisant par $B''^2 - AA'$, qui n'est jamais nul, on a aussi

(6) $$x' - \mu z' = R, \quad y' - \nu z' = R',$$

R et R' étant connus.

III. Dans l'équation (1), remplaçant A, A', A'' par leurs valeurs tirées des équations (3), on obtient

$$\frac{B'}{\mu}(x - \mu z)^2 + \frac{B}{\nu}(y - \nu z)^2 + \frac{B''}{\mu\nu}(\nu x - \mu y)^2 = 2Cx + 2C'y + 2C''z + E,$$

et nous supposerons cette équation accentuée pour les coordonnées du sommet : alors les carrés qu'elle contient sont connus, car

$$\nu x' - \mu y' = R\mu - R'\nu,$$

et il reste

(7) $$Cx' + C'y' + C''z' = H,$$

égalité dont le second membre est connu et qui achève, avec les équations (6), de *déterminer le sommet par des* *relations du premier degré*. Cependant, si l'on remplace dans l'équation (7) x' et y' par leurs valeurs, le coefficient de z' sera

$$C\mu + C'\nu + C'',$$

et la surface, comme on l'a vu, dégénère en cylindre pour

$$C\mu + C'\nu + C'' = 0.$$

Cette transformation suppose μ et ν différents de zéro : si, par exemple, $\mu = 0$, les équations (3) donnent

$$B' = -B''\nu, \quad A' = -\frac{B}{\nu}, \quad A'' = -B\nu,$$

et l'équation (1) devient

$$Ax^2 + 2B''x(y - \nu z) - \frac{B}{\nu}(y - \nu z)^2$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Alors

$$x' = R, \quad y' - \nu z' = R',$$

et il reste

$$C'y' + C''z' = H'.$$

Enfin, pour

$$\mu = 0, \quad \nu = 0,$$

les équations (3) donnent

$$B' = 0, \quad B = 0, \quad A'' = 0,$$

et l'équation (1) se réduit à

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Ici

$$x' = R, \quad y' = R',$$

il reste donc

$$C''z' = H''.$$

IV. Pour trouver les directions des deux autres axes, il faut recourir à l'équation qui les détermine dans une surface quelconque du second degré. Comme il s'agit d'un paraboloïde, cette équation se réduit au second degré; de plus le terme indépendant, qui est

$$\begin{aligned}A'A''-B^2+AA''-B'^2+AA'-B''^2\\ +2\cos xy\,(BB'-A''B'')+2\cos xz\,(BB''-A'B')\\ +2\cos yz\,(B'B''-AB),\end{aligned}$$

se transforme, si l'on observe que les équations (3), d'où l'on a déjà tiré,

$$A'B'-BB''=\mu\,(B''^2-AA')$$

et

$$AB-B'B''=\nu\,(B''^2-AA'),$$

donnent aussi

$$\begin{aligned}A''B''-BB'&=\nu\,(A'B'-BB'')=\mu\nu\,(B''^2-AA'),\\ B^2-A'A''&=\mu\,(A'B'-BB'')=\mu^2\,(B''^2-AA'),\\ B'^2-AA''&=\nu\,(AB-B'B'')=\nu^2\,(B''^2-AA');\end{aligned}$$

cette équation devient donc

$$\begin{aligned}&S^2\,(1-\cos^2 xy-\cos^2 xz-\cos^2 yz+2\cos xy\cos xz\cos yz)\\ &-S\left\{\begin{aligned}&A\sin^2 yz+A'\sin^2 xz+A''\sin^2 yx\\ &-2B''(\cos xy-\cos xz\cos yz)\\ &-2B'(\cos xz-\cos xy\cos yz)\\ &-2B(\cos yz-\cos xy\cos xz)\end{aligned}\right\}\\ &-(B''^2-AA')\left(\begin{aligned}1+\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cos xy+2\mu\cos xz\\ +2\nu\cos yz\end{aligned}\right)=0.\end{aligned}$$

Le terme indépendant ne peut être nul, non plus que le coefficient de S^2, qui est le volume du parallélipipède fait sur trois longueurs égales à l'unité et portées sur les axes : ainsi les racines S_1, S_2 ne seront jamais nulles ni infinies. Enfin les équations (2) nous donneront, par exemple,

$$\mu_2 = \frac{(S_2 \cos xz - B')(S_2 - A') - (S_2 \cos yz - B)(S_2 \cos xy - B'')}{(S_2 \cos xy - B'')^2 - (S_2 - A)(S_2 - A')},$$

$$\nu_2 = \frac{(S_2 \cos yz - B)(S_2 - A) - (S_2 \cos xz - B')(S_2 \cos xy - B'')}{(S_2 \cos xy - B'')^2 - (S_2 - A)(S_2 - A')}.$$

De même S_1 donnera μ_1 et ν_1 : ces valeurs sont indéterminées pour $S_1 = S_2$, quand la surface est de révolution.

V. L'équation du paraboloïde rapporté à ces nouveaux axes sera de la forme

$$Y^2 \pm M^2 X^2 = 2PZ,$$

en prenant l'axe diamétral pour celui des Z. Ce paraboloïde sera elliptique pour le signe supérieur et hyperbolique pour le signe inférieur ; le premier cas aura lieu si S_1 et S_2 sont de même signe, et le second cas si ces racines sont de signe contraire. En effet, dans une surface à centre, soient R_1^2 et R_2^2 les carrés des demi-axes principaux comptés sur les directions qui correspondent à S_1 et à S_2, on a

$$R_1^2 S_1 = R_2^2 S_2 :$$

or, dans la surface d'où dérive le paraboloïde, on a

$$M^2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{S_1}{S_2},$$

et pour celui-ci on a toujours à la limite

$$M^2 = \frac{S_1}{S_2},$$

en admettant que S_1 corresponde à X et S_2 à Y.

Ainsi on détermine M^2 qui est toujours fini, puisque S_1 et S_2 diffèrent de zéro.

VI. Il reste à connaître P. Pour cela, transportons l'origine au sommet, sans changer la direction des coordonnées, ce qui revient à remplacer x, y et z par $x+x'$, $y+y'$ et $z+z'$: d'après les équations (5), la nouvelle équation de la surface sera

$$(8)\quad \begin{cases} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy \\ \qquad +2\rho(hx+h'y+h''z)=0. \end{cases}$$

D'un point de l'axe diamétral, pris à la distance Z du sommet, menons à l'axe des Y une parallèle, pour laquelle $X=0$, puisqu'elle est dans le plan des ZY, et qui rencontrera la surface en deux points pour lesquels Y aura des valeurs égales et de signe contraire. Pour ces valeurs

$$P=\frac{Y^2}{2Z},$$

et il faut calculer Z et Y.

Soient

$$z_1,\quad x_1=\mu z_1\quad \text{et}\quad y_1=\nu z_1$$

les coordonnées de ce point pris sur l'axe diamétral ; il est clair que

$$Z=z_1\sqrt{1+\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cos xy+2\mu\cos xz+2\nu\cos yz}.$$

Les équations de la parallèle seront

$$x-x_1=\mu_2(z-z_1),\quad y-y_1=\nu_2(z-z_1),$$

d'où l'on tire

$$x=\mu z_1+\mu_2(z-z_1),$$
$$y=\nu z_1+\nu_2(z-z_1)$$

et

$$z=z_1+(z-z_1),$$

valeurs qu'il faut substituer dans l'équation (8) en ordonnant par rapport à $z - z_1$. Du reste

$$Y^2 = (z - z_1)^2 \begin{pmatrix} 1 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + 2\mu_2\nu_2 \cos xy \\ + 2\mu_2 \cos xz + 2\nu_2 \cos yz \end{pmatrix},$$

et comme on sait que Y doit avoir deux valeurs égales et de signe contraire, il doit en être de même pour $z - z_1$; c'est-à-dire que, dans cette substitution, les termes qui contiennent $z - z_1$ à la première puissance disparaîtront d'eux-mêmes, ce qui dispense de les calculer.

Le terme en z_1^2 disparaîtra aussi, à cause des équations (3), car son coefficient sera

$$\begin{gathered} A\mu^2 + A'\nu^2 + A'' + 2B\nu + 2B'\mu + 2B''\mu\nu \\ = \mu(A\mu + B' + B''\nu) + \nu(A'\nu + B + B''\mu) + A'' + B\nu + B'\mu = 0; \end{gathered}$$

enfin celui de z_1 est

$$2\rho(h\mu + h'\nu + h'') = 2(C\mu + C'\nu + C''),$$

comme on l'a vu plus haut.

Le coefficient de $(z - z_1)^2$ est

$$A\mu_2^2 + A'\nu_2^2 + A'' + 2B\nu_2 + 2B'\mu_2 + 2B''\mu_2\nu_2,$$

et les équations (2) font voir, par un calcul analogue au précédent, que ce coefficient est égal à

$$S_2(1 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + 2\mu_2\nu_2 \cos xy + 2\mu_2 \cos xz + 2\nu_2 \cos yz).$$

Il reste donc

$$S_2 Y^2 + 2z_1(C\mu + C'\nu + C'') = 0$$

et

$$Y^2 = -\frac{2z_1(C\mu + C'\nu + C'')}{S_2};$$

ensuite

$$P = \frac{C\mu + C\nu + C''}{S_2\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos xy + 2\mu\cos xz + 2\nu\cos yz}}.$$

Nous ne considérons pas le signe de P, que l'on prend toujours positif, mais celui de Y^2 est important, car il montre que z_1 correspond à la partie positive de l'axe des Z, si le signe de z_1 est contraire à celui du rapport $\frac{C\mu + C'\nu + C''}{S_2}$.