NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BLANCHÉ-ARRAULT

C. KESSLER

Solution analytique de la question 587

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 297-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__297_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 587

(voir p. 140),

PAR M. BLANCHÉ-ARRAULT,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet),
ET M. C. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Quelle est la surface engendrée par une droite assujettie à glisser sur deux droites A et B et telle, que dans chacune de ses positions l'angle qu'elle fait avec A est égal à l'angle qu'elle fait avec B.

Prenons pour axe des z la plus courte distance des deux droites, pour origine le milieu de celle-ci et pour axe des x et des y les bissectrices de l'angle des deux droites données.

Si l'on désigne par $2c$ la plus courte distance, les équations des deux droites données sont

$$(1) \qquad \begin{cases} z = c, \\ y = mx; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} z = -c, \\ y = -mx. \end{cases}$$

Une droite quelconque prise à volonté a pour équations

$$(3) \qquad \frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

En désignant par $\alpha\beta\gamma$ les angles que fait cette droite avec les axes et par $x_1 y_1$ les coordonnées d'un point quelconque du plan des xy, si l'on veut que la droite (3) rencontre la droite (1), il suffit d'exprimer que les quatre équations de ces deux droites ont un système commun de solution, ce qui donne une équation de condition

$$A_1 = 0.$$

Si l'on exprime que la génératrice rencontre la droite (2), on aura encore une équation de condition

$$B_1 = 0.$$

Actuellement exprimons que la droite satisfait à la condition énoncée de faire avec la droite A le même angle qu'avec la droite B. Si nous désignons par α', β', α'', β'' les angles que chacune de ces droites fait avec les axes des x

et des y, nous aurons

$$\cos\alpha' = \pm \cos\alpha'',$$
$$\cos\beta' = \pm \cos\beta''.$$

Par conséquent la condition qui exprime que l'angle de la génératrice avec A est le même qu'avec B se réduit à

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' = \pm \cos\alpha \cos\alpha' \pm \cos\beta \cos\beta'.$$

Ces quatre équations se réduisent à deux. En effet, si l'on prend les deux signes $+$ dans le second membre, elle se réduit à une identité; si l'on prend les deux signes $-$, on a

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' = 0,$$

ou, remplaçant $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ par leurs valeurs en fonction de m,

$$\cos\alpha + m\alpha\beta = 0.$$

D'ailleurs $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est égal à l'inverse du coefficient angulaire de la projection de la droite (3) sur le plan des xy; donc cette relation exprime que cette projection et par suite la droite (3) est perpendiculaire sur la droite mx, condition qui ne peut être réalisée que pour l'axe des z. Les deux seules équations relatives à la question sont donc

$$\cos\alpha \cos\alpha' = 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha = 0,$$
$$\cos\beta \cos\beta' = 0 \quad \text{et} \quad \cos\beta = 0.$$

La première exprime que la génératrice se meut dans un plan perpendiculaire à l'axe des zx; donc la surface engendrée est celle d'une droite assujettie à glisser sur deux autres exactement parallèles à un plan fixe; donc le lieu est un *paraboloïde hyperbolique*. De même

$$\cos\beta = 0$$

exprime que la génératrice demeure parallèle au plan des zx; donc la surface engendrée est encore un *paraboloïde hyperbolique* ayant le plan des zx pour plan directeur. Si on voulait avoir leurs équations, il suffirait de considérer successivement les équations

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0,$$

puis de les joindre aux relations

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0,$$

ainsi qu'aux équations de la génératrice. L'élimination de x_1, y_1, $\alpha\beta\gamma$ donnera les équations des deux paraboloïdes. On trouve ainsi facilement :

$$cy = mzx \quad \text{et} \quad mcx = zy;$$

ce qui fait voir que les axes de coordonnées ox, oy, oz appartiennent à la surface, circonstance évidente à priori.

Note. M. C. Kessler donne aussi une solution géométrique fondée sur ce que la surface cherchée est engendrée par une droite glissant sur deux autres droites et restant parallèle au plan bissecteur de l'angle de ces deux droites.

MM. Martin, Maury, Cherpin, Dangin, élèves du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet), ont aussi envoyé des solutions à peu près identiques.