Henri Pigeon

Solution de la question 532 (voir page 248)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 286-289

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__286_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 532 (*)

(voir page 248),

PAR M. HENRI PIGEON,
Elève du lycée de Strasbourg.

Veuillez me permettre de remarquer que l'énoncé de la question 532 est inexact, Huygens dit en effet dans l'édition *s'Gravesande* que j'ai de ses œuvres ·

(*) Comment concilier ceci avec la solution page 274?

Omnis circulus major (*) *est polygono æqualium laterum sibi inscripto et triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.* (De circuli magnitudine.)

Voici de cette proposition une démonstration qui n'est à la vérité que celle de Huygens abrégée et modifiée.

Soient AB le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, AC le côté du polygone régulier de $2n$ côtés et O le centre du cercle.

Il faut démontrer que l'on a

$$\text{secteur AOB} > \text{AOBC} + \frac{1}{3}\,\text{ABC}$$

ou

$$\text{segments (AMC + BNC)} > \frac{1}{3}\,\text{ACB},$$

ce qui se fait voir de la manière suivante.

Lemme. Si dans un segment, moindre qu'un demi-cercle, on inscrit le triangle maximum ABC et ensuite, dans les deux segments ainsi formés, les triangles maximums ADB, BEC, le triangle ABC inscrit en premier lieu sera moindre que huit fois l'un des triangles inscrits en second lieu.

On a

$$\text{AB} < 2\,\text{BD};$$

d'où

$$\text{AB}^2 < 4\,\text{BD}^2;$$

abaissant sur les parallèles DE, AC la perpendiculaire BFG, on a

$$\text{BG} < 4\,\text{BF},$$

(*) L'énoncé de la question 532 impliquant le contraire.

car on sait que

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{BG}{BF}.$$

En outre on a

$$AC < 2AB = 2DE,$$

d'où *componendo*

$$AC \times BG < 8DE \times BF$$

ou bien

$$ABC < 8DBE = 8ABD.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. Le rapport d'un segment moindre qu'un demi-cercle au triangle maximum inscrit dans ce segment est moindre que celui de 4 à 3.

Si, en effet, on inscrit les triangles maximums dans les segments formés successivement, a étant l'aire du premier, les autres seront moindres respectivement, d'après le lemme précédent, que

$$\frac{a}{8}, \quad \frac{a}{8^2}, \quad \frac{a}{8^3}, \ldots,$$

et comme le nombre des triangles correspondant à ces valeurs va toujours se doublant, il s'ensuit qu'il y en a 2 des premiers, 2^2 des seconds, 2^3 des troisièmes, 2^4 des quatrièmes, etc.

De sorte que la somme limite de tous ces triangles, laquelle somme n'est autre chose que le segment considéré, est moindre que

$$a + \frac{2}{8}a + \frac{2^2}{8^2}a + \frac{2^3}{8^3}a + \frac{2^4}{8^4}a + \ldots$$

ou moindre que

$$\frac{a}{1 - \frac{2}{8}} = \frac{4}{3}a.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. On a

$$AMC + ANC > \frac{1}{3} ABC.$$

De ce que

$$\text{segment } AMCB > \frac{4}{3} ABC, \text{ d'après le corollaire I},$$

il résulte que

$$ABC + AMC + BNC > ABC + \frac{1}{3} ABC,$$

d'où

$$AMC + BNC > \frac{1}{3} ABC.$$

C. Q. F. D.