

A. PRINZ

Question 572, démonstration de la formule

$$L.2 = 4 \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \dots \right)$$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 284-286

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__284_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 572

(voir p 112),

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$L.2 = 4 \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \dots \right);$$

PAR M. A. PRINZ,

Etudiant en mathématiques à l'Université d'Iena.

En posant généralement

$$S = \left[\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)(a+6b)} + \dots \right],$$

on a

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2b} \left[\frac{1}{a(a+b)} - \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(a+5b)(a+6b)} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2b^2} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+4b} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{a+5b} - \frac{1}{a+5b} + \frac{1}{a+6b} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2b^2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+4b} + \dots \right] \\
 &\quad - \frac{1}{b^2} \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+5b} + \frac{1}{a+9b} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2b^2} \int_0^1 (x^{a-1} + x^{a+2b-1} + x^{a+4b-1} + \dots) dx \\
 &\quad - \frac{1}{b^2} \int_0^1 (x^{a+b-1} + x^{a+5b-1} + x^{a+9b-1} + \dots) dx \\
 &= \frac{1}{2b^2} \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x^{2b}} dx - \frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{x^{a+b-1}}{1-x^{4b}} dx \\
 &= \frac{1}{2b^2} \int_0^1 \frac{2^{a-1}(1+x^{2b}) - 2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}} dx \\
 &= \frac{1}{2b^2} \int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{a+2b-1} - 2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}} dx.
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la question 572, $a = b = 1$,

et

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2-2x}{1-x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x+x^2+x^3} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1},
 \end{aligned}$$

d'où

$$S = \frac{1}{2} L.(x+1)_0^1 - \frac{1}{4} L.(x^2+1)_0^1,$$

$$S = \frac{1}{2} L_2 - \frac{1}{4} L_2 = \frac{1}{4} L_2.$$

Donc

$$L_2 = 4.S = 4 \left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \dots \right].$$

C. Q. F. D.

On peut traiter de même les cas où l'on aurait $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 1$; etc.