A. Prinz

Question 572, démonstration de la formule $L.2 = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots\right)$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 284-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__284_1>

QUESTION 572

(voir p 112),

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$\mathrm{L}.2 = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots\right);$$

PAR M. A. PRINZ,
Etudiant en mathématiques a l'Universite d'Iena.

En posant généralement

$$\mathrm{S} = \left[\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)(a+6b)} + \ldots\right],$$

on a

$$S = \frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a(a+b)} - \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} - \frac{1}{(a+5b)(a+6b)} + \cdot \cdot\right]$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+4b} - \frac{1}{a+5b} - \frac{1}{a+5b} + \frac{1}{a+6b} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+4b} + \cdot \cdot\right] - \frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+5b} + \frac{1}{a+9b} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_0^1 (x^{a-1} + x^{a+2b-1} + x^{a+4b-1} + \ldots)\,dx - \frac{1}{b^2}\int_0^1 (x^{a+b-1} + x^{a+5b-1} + x^{a+9b-1} + \ldots)\,dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x^{2b}}\,dx - \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1+x^{2b}) - 2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{a+2b-1} - 2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx.$$

Dans le cas particulier de la question 572, $a = b = 1$, et

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 + x^2 - 2x}{1 - x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - x}{1 + x + x^2 + x^3}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 1},$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(x + 1)_0^1 - \frac{1}{4}\,\mathrm{L}.(x^2 + 1)_0^1,$$

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{L}2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{L}.2.$$

Donc

$$\mathrm{L}2 = 4.S = 4\left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots\right].$$

C. Q. F. D.

On peut traiter de même les cas ou l'on aurait $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 1$; etc.