NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. KESSLER

Solution de la question 497

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 275-278

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__275_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 497

(voir t XVIII, p 444),

PAR M. C. KESSLER,
Eleve du lycée Saint-Louis.

Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe. (MOUTARD.)

Je considère la conique dans une de ses positions, par un point de l'axe je mène deux tangentes à cette conique, également inclinées sur cet axe, ce qui est toujours possible, je rapporte alors la conique à ces deux tangentes prises pour axes des x et des z, ses équations seront

$$(1) \qquad xz + \lambda(ax + bz - 1)^2 = 0, \quad y = 0,$$

l'axe des y est pris perpendiculairement aux deux autres.

Je cherche l'équation de la surface engendrée.

Soient

$$z - x = k, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2zx\cos\theta = \rho^2, \quad (4)$$

θ étant l'angle des deux tangentes, les équations d'un parallèle. J'élimine x, y, z entre les quatre équations précédentes; l'équation (4) peut s'écrire

$$x^2 + z^2 - 2zx + 4zx\cos^2\frac{\theta}{2} = \rho^2$$

ou

$$zx = \frac{\rho^2 - k^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

et, par suite,

$$(z + x)^2 = (z - x)^2 + 4zx = k^2 + \frac{\rho^2 - k^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

d'où l'on déduit alors

$$z = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad x = \frac{k}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}},$$

et, par suite, substituant dans l'équation (1),

$$\frac{\rho^2 - k^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \lambda\left[\frac{a}{2}\left(k - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{b}{2}\left(k + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right]^2 = 0,$$

Pour avoir l'équation de la surface, ou plutôt celle de la section par le plan doublement tangent yOx qui est ici quelconque puisque la conique a été prise dans une quelconque de ses positions, et qui est bien doublement tangent, il suffit de remplacer k par $-x$ et ρ^2 par $x^2 + y^2$, et il vient

$$\frac{y^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} - \lambda'\left[\frac{a}{2}\left(-x - \frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{b}{2}\left(-x + \frac{\sqrt{y^2 + x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right] = 0.$$

λ ne peut être positif, car on aurait la somme de deux carrés qui ne pourrait être nulle que pour certaines valeurs particulières de x, y, z ; c'est pour cette raison que j'ai posé

$$\lambda = -\lambda';$$

on voit alors que cette équation se décompose en deux autres du second degré

$$\frac{y}{2\cos\frac{\theta}{3}}+\sqrt{\lambda'}\left[+\frac{a}{2}\left(x+\frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2}+y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{2}\left(x-\frac{\sqrt{y^2+x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)+1\right]=0,$$

$$\frac{y}{2\cos\frac{\theta}{3}}-\sqrt{\lambda'}\left[+\frac{a}{2}\left(x+\frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2}+y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{2}\left(x-\frac{\sqrt{y^2+x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)+1\right]=0$$

Projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, elles ont un foyer commun au pied de l'axe, car si l'on remplace $x\cos\frac{\theta}{2}$ par x, on a la nouvelle projection ; ce qui montre que $\sqrt{x^2+y^2}$ est fonction linéaire de x et de y pour chaque conique. Le cas du tore s'en déduirait facilement