Nouvelles annales de mathématiques

C. Kessler

Solution des questions 531 et 532

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 273-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__273_0>

SOLUTION DES QUESTIONS 531 ET 532

(voir t. XIX, p 247 et 248),

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycee Saint-Louis

Question 531.

Soient A l'aire d'un polygone régulier circonscrit à un cerle, A' l'aire d'un polygone semblable inscrit; l'aire du cercle est comprise entre A' et $A' + \frac{2}{3}(A - A')$.

Soient AB le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, et CD le côté du polygone circonscrit de n côtés.

Soit G le point de contact de CD. Je considère la valeur du rapport

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} = \frac{\text{segment AGB}}{\text{CABD}}.$$

D'après un théorème connu, l'aire d'un segment a pour limite supérieure les $\frac{4}{3}$ du triangle isocèle y inscrit; donc

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} < \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\tang\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\tang\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}.$$

Or

$$\cos\frac{\pi}{n} < \cos^2\frac{\pi}{2n},$$

et le maximum est $\frac{2}{3}$; donc

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} < \frac{2}{3}$$

ou

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{2}{3}(A - A'),$$

énoncé différent de celui des *Annales*. Il est facile de voir, sans s'appuyer sur le théorème que j'ai invoqué, que

$$\text{cercle} > A' + \frac{1}{2}(A - A');$$

c'est une limite inférieure plus rapprochée que A, il suffit pour cela de voir que le minimum du rapport

$$\frac{1}{2}\,\frac{x - \sin x}{\tang\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x} \quad \text{est} \quad \frac{1}{2}.$$

Cela se voit facilement.

Question 532.

Soient A l'aire d'un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans un cercle, A′ l'aire d'un polygone régulier inscrit d'un nombre n de côtés. L'aire du cercle est comprise entre A′ et $A' + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (A - A')$.

O centre du cercle;
AB côté du polygone régulier inscrit de n côtés;
AC côté du polygone régulier inscrit de $2n$ côtés;
AMC segment sous-tendu par AC.

Je considère le rapport

$$\frac{\text{segment AMC}}{A - A'} < \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{2\pi}{n}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{2}{3}\,\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)},$$

dont le maximum correspond à $n = 3$ et est $\frac{4}{9}$; donc

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{4}{9}(A - A'),$$

limite plus rapprochée que celle donnée par les *Annales* et conséquemment par Huygens.

La question 531, traitée par M. Dellach (p. 174), n'a aucun rapport avec celle-ci, donnée exactement par les *Nouvelles Annales*, à cette différence que ma limite est plus rapprochée, comme on le voit facilement.