

C. KESSLER

## Solution des questions 531 et 532

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 20  
(1861), p. 273-275

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1861\\_1\\_20\\_\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__273_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION DES QUESTIONS 531 ET 532

(voir t. XIX, p 247 et 248),

PAR M. C. KESSLER,  
Elève du lycée Saint-Louis

## Question 531.

Soient  $A$  l'aire d'un polygone régulier circonscrit à un cercle,  $A'$  l'aire d'un polygone semblable inscrit; l'aire du cercle est comprise entre  $A'$  et  $A' + \frac{2}{3}(A - A')$ .

Soient  $AB$  le côté du polygone régulier inscrit de  $n$  côtés, et  $CD$  le côté du polygone circonscrit de  $n$  côtés.

Soit  $G$  le point de contact de  $CD$ . Je considère la valeur du rapport

$$\frac{\text{segment } AGB}{A - A'} = \frac{\text{segment } AGB}{CABD}.$$

D'après un théorème connu, l'aire d'un segment a pour limite supérieure les  $\frac{4}{3}$  du triangle isocèle y inscrit; donc

$$\begin{aligned} \frac{\text{segment } AGB}{A - A'} &< \frac{\frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{n} (1 - \cos \frac{\pi}{n})}{\text{tang} \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{n} (1 - \cos \frac{\pi}{n})}{\text{tang} \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Or

$$\cos \frac{\pi}{n} < \cos^2 \frac{\pi}{2n},$$

et le maximum est  $\frac{2}{3}$ ; donc

$$\frac{\text{segment } AGB}{A - A'} < \frac{2}{3}$$

ou

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{2}{3}(A - A'),$$

énoncé différent de celui des *Annales*. Il est facile de voir, sans s'appuyer sur le théorème que j'ai invoqué, que

$$\text{cercle} > A' + \frac{1}{2}(A - A');$$

c'est une limite inférieure plus rapprochée que  $A$ , il suffit pour cela de voir que le minimum du rapport

$$\frac{1}{2} \frac{x - \sin x}{\tan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x} \text{ est } \frac{1}{2}.$$

Cela se voit facilement.

### Question 532.

Soient  $A$  l'aire d'un polygone régulier de  $2n$  côtés inscrit dans un cercle,  $A'$  l'aire d'un polygone régulier inscrit d'un nombre  $n$  de côtés. L'aire du cercle est comprise entre  $A'$  et  $A' + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (A - A')$ .

O centre du cercle;

AB côté du polygone régulier inscrit de  $n$  côtés;

AC côté du polygone régulier inscrit de  $2n$  côtés;

AMC segment sous-tendu par AC.

Je considère le rapport

$$\frac{\text{segment AMC}}{A - A'} < \frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{n} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{2\pi}{n} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right)} = \frac{2}{3} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n} \right)},$$

dont le maximum correspond à  $n = 3$  et est  $\frac{4}{9}$ ; donc

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{4}{9}(A - A'),$$

limite plus rapprochée que celle donnée par les *Annales* et conséquemment par Huygens.

La question 531, traitée par M. Dellach (p. 174), n'a aucun rapport avec celle-ci, donnée exactement par les *Nouvelles Annales*, à cette différence que ma limite est plus rapprochée, comme on le voit facilement.