NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KESSLER

L. VERHARNE

Solution de la question 479

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 264-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__264_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 479

(voir t. XVIII, p. 172);

PAR M. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis;

ET M. L. VERHARNE,
Élève du lycée de Douai (classe de M. David).

$$\begin{aligned}a^n+b^n=(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4}\\-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-6}\\+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}a^4b^4(a+b)^{n-8}\\-\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5}a^5b^5(a+b)^{n-10},\end{aligned}$$

n entier positif; on arrête la série lorsque l'exposant de $(a+b)$ devient négatif.

Il faut alterner les signes.

On vérifie aisément que cette égalité a lieu pour $n=1, 2, 3,\ldots$ Je dis qu'elle a lieu dans tous les cas, et pour cela je ferai voir que si elle a lieu pour l'exposant n, elle subsiste aussi pour l'exposant $(n+1)$. Soit donc

$$\begin{aligned}a^n+b^n=(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4}\\-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-6}+\ldots.\end{aligned}$$

Je remarque qu'on a identiquement

$$a^{n+1}+b^{n+1}=(a^n+b^n)(a+b)-ab(a^{n-1}+b^{n-1}).$$

Or

$$(1)\left\{\begin{aligned}(a^n+b^n)(a+b) &= (a+b)^{n+1} - nab(a+b)^{n-1}\\ &\quad + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-3}\\ &\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-5} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}a^{n-1}+b^{n-1} &= (a+b)^{n-1} - (n-1)ab(a+b)^{n-3}\\ &\quad + \frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-5}\\ &\quad - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-7} + \ldots,\end{aligned}$$

$$(3)\left\{\begin{aligned}ab(a^{n-1}+b^{n-1}) &= ab(a+b)^{n-1} - (n-1)a^2b^2(a+b)^{n-3}\\ &\quad + \frac{(n-1)(n-4)}{1\ 2}a^3b^3(a+b)^{n-5}\\ &\quad - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^4b^4(a+b)^{n-7} + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Retranchant convenablement (3) de (1), il vient

$$\begin{aligned}a^{n+1}+b^{n+1} &= (a+b)^{n+1} - (n+1)ab(a+b)^{n-1}\\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-3} - \ldots.\end{aligned}$$

La loi est donc générale. C. Q. F. D.

Du reste cette proposition résulte immédiatement des formules d'Albert Girard, car a et b sont les racines de l'équation

$$z^2 - (a+b)z + ab = 0,$$

par suite $a^n + b^n$ est la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de ces racines, et Waring a donné une formule qui donne immédiatement cette somme; il ne reste qu'à y supposer le degré de l'équation égal à 2. Je crois d'ailleurs que Waring a fait lui-même ce calcul.

Note du Rédacteur. C'est le terme général d'une série récurrente dont l'échelle a deux termes.