CATALAN

Sur la sommation de certains coefficients binomiaux (voir t. XIX, p. 32)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 260-263

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__260_2>

SUR LA SOMMATION DE CERTAINS COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir t. XIX, p. 32);

PAR M. CATALAN (*).

I. PROBLÈME. *Dans le développement de* $(1+z)^m$, *on prend les termes de* p *en* p. *Quelle est la somme de*

(*) Né à Bruges (Belgique) le 30 mai 1814.

leurs coëfficiens? (L'exposant m est supposé entier positif) (*).

Représentons par S_0, S_1, ..., S_{p-1} les sommes dont les premiers termes sont $1, \frac{m}{1}, \ldots, \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}$. Soit θ une racine *primitive* de l'équation

$$(1) \qquad \theta^p - 1 = 0.$$

En remplaçant z, successivement, par $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^p$, nous aurons, en vertu de cette équation,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} (1+\theta)^m = S_0 + S_1\theta + \ldots + S_{p-1}\theta^{p-1}, \\ (1+\theta^2)^m = S_0 + S_1\theta^2 + \ldots + S_{p-1}\theta^{2(p-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1+\theta^{p-1})^m = S_0 + S_1\theta^{p-1} + \ldots + S_{p-1}\theta^{(p-1)(p-1)}, \\ (1+1)^m = S_0 + S_1 + \ldots + S_{p-1}. \end{array}\right.$$

II. Pour tirer, des équations (2), la valeur de S_k, il suffit de les ajouter membre à membre, après avoir multiplié par θ^{-k} les deux membres de la première, par θ^{-2k} les deux membres de la deuxième, etc. En effet, le coefficient de $S_{k'}$, dans l'équation résultante, est

$$\theta^{k'-k} + \theta^{2(k'-k)} + \ldots + \theta^{p(k'-k)} = 0,$$

attendu que k' et k étant inégaux, et inférieurs à p, $\theta^{k'-k}$ est une racine primitive de l'équation (1).

Par suite,

$$(3) \quad pS_k = (1+\theta)^m\theta^{-k} + (1+\theta^2)\theta^{-2k} + \ldots + (1+\theta^p)^m\theta^{-pk}.$$

(*) Un jeune géomètre, M. Haton de la Goupillière, a résolu la même question pour le cas d'une fonction quelconque. Néanmoins, à cause de la simplicité du résultat exprimé par la formule (C), j'ai cru pouvoir le faire connaître.

III. Soit maintenant

$$(4)\qquad \theta = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}
&1+\theta = 2\cos\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}},\\
&1+\theta^2 = 2\cos\frac{2}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{2}{2}\varphi\sqrt{-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&1+\theta^p = 2\cos\frac{p}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{p}{2}\varphi\sqrt{-1}}.
\end{aligned}\right.$$

La formule (3) devient

$$p\,S_k = 2^m\left\{\begin{aligned}
&\cos^m\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\,.\,e^{2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\\
&\qquad\qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi\,.\,e^{p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}}
\end{aligned}\right\}.$$

Par conséquent

$$(\text{A})\quad p\,S_k = 2^m\left\{\begin{aligned}
&\cos^m\frac{1}{2}\varphi\cos\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\cos 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \ldots\\
&\qquad\qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi\,.\cos p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi
\end{aligned}\right\},$$

et

$$(\text{B})\quad \left\{\begin{aligned}
&0 = \cos^m\frac{1}{2}\varphi\sin\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\sin 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \ldots\\
&\qquad\qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi\sin p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi.
\end{aligned}\right.$$

IV. Très-souvent l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de S_k. Mais, par cela même, l'équation (A) peut être regardée comme donnant la sommation de cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$(\mathrm{C})\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q\frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q\frac{\pi}{p} + \ldots \\ &\qquad + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq\frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} \mathrm{S}_k. \end{aligned} \right.$$

Par exemple,

$$\cos^7\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{3} + \cos^7\frac{2\pi}{3}\cos\frac{10\pi}{3} + \cos^7\pi\cos 5\pi = \frac{3}{2^7}(7+35+1).$$

V. Si $k+p$ surpasse $m+1$, la somme S_k est composée d'un seul terme, égal à $\mathrm{C}_{m,k}$; donc alors

$$(\mathrm{D})\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos^m\frac{\pi}{p}\cos q\frac{\pi}{p} + \cos^m\frac{2\pi}{p}\cos 2q\frac{\pi}{p} + \ldots + \cos^m\frac{p\pi}{p} \,.\, \cos pq\frac{\pi}{p} \\ &\qquad = \frac{p}{2^m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}. \end{aligned} \right.$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m = 13,\ p = 11,\ k = 3,\ q = 7:$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\cos^{13}\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} + \cos^{13}\frac{2\pi}{11}\cos\frac{14\pi}{11} + \cos^{13}\frac{3\pi}{11}\cos\frac{21\pi}{11} + \ldots \\ &\qquad + \cos^{13}\pi\cos 7\pi = \frac{11}{2^{13}}\,.\,286. \end{aligned} \right.$$

11 janvier 1861.