Nouvelles annales de mathématiques

E. de Jonquières

Solution de la question 524 (Faure)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 25-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__25_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 524 (FAURE)

(voir t. XIX, p. 234);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Il s'agit de prouver que *la tangente menée du centre d'une ellipse au cercle circonscrit à un triangle quelconque conjugué à cette ellipse, est égale à la corde du quadrant de l'ellipse.*

Soient P un point extérieur à l'ellipse et pris arbitrairement dans son plan; L sa polaire, qui rencontre la courbe aux points a, a'; α le milieu de la corde aa'; O le centre de la courbe; AA' son diamètre parallèle à aa', et BB' le diamètre conjugué qui passe par le point P. Tous les triangles conjugués à l'ellipse qui ont un de leurs sommets en P, ont leurs deux autres sommets situés sur L, et ces deux sommets divisent harmoniquement le segment aa'. Ainsi tous les cercles circonscrits à ces triangles ont en commun le point P, et interceptent sur L des segments en involution. Il en résulte que ces cercles ont pour *axe radical* commun le diamètre OP qui passe par le point α, *point central* de l'involution dont il s'agit. Soit Q le second point commun à tous ces cercles. La position de ce point Q sur la droite αP est déterminée par la relation

$$(1) \qquad \alpha P . \alpha Q = \overline{\alpha a}^2;$$

car l'un de ces cercles est évidemment tangent à la corde aa' en son point α.

Le point O appartenant à l'axe radical commun à tous ces cercles, il en résulte que toutes les tangentes qu'on peut leur mener par le point O sont de même longueur Ot, et l'on a

$$(2) \quad \overline{Ot}^2 = OP.OQ = OP.(O\alpha + \alpha Q) = OP.O\alpha + \frac{OP}{\alpha P} \cdot \overline{\alpha a}^2,$$

à cause de la relation (1).

Mais les segments $P\alpha$, BB' étant conjugués harmoniques, on a (*Géométrie supérieure*, p. 47, formules 10 et 13)

$$OB^2 = OP.O\alpha \quad \text{et} \quad \alpha B.\alpha B' = O\alpha.\alpha P.$$

D'ailleurs, par une propriété générale des coniques connue sous le nom de *théorème de Newton*, on a aussi

$$\frac{\overline{\alpha a}^2}{\alpha B.\alpha B'} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2};$$

donc l'équation (2) devient

$$\overline{Ot}^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2,$$

a et b étant les axes de l'ellipse.

Ainsi la longueur de la tangente est indépendante de la position du point P, et par conséquent elle convient au cercle circonscrit à un triangle conjugué *quelconque*. Enfin on voit, par son expression, qu'elle est égale à celle de la corde du quadrant de l'ellipse. C. Q. F. D.