NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-E. KUMMER

E. DEWULF

Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 255-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__255_1>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 72),

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ IV. — *Foyers des rayons, leurs points milieux et leurs plans focaux.*

En mettant dans les expressions (12) et (14) (§ I) pour dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, leurs valeurs en fonction des quotients différentiels partiels ou des différentielles des variables indépendantes et pour $\varkappa$, λ, μ, leurs valeurs (§ III), on trouve pour dp et ds :

$$(1)\qquad ds = du\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2},$$

$$(2)\qquad dp = \frac{du\,(\mathrm{f}'+\mathrm{g}t)(\mathcal{E}+\mathcal{F}t)-(\mathrm{e}+\mathrm{f}t)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}};$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{dp}{ds} = \frac{(\mathrm{f}'+\mathrm{g}t)(\mathcal{E}+\mathcal{F}t)-(\mathrm{e}+\mathrm{f}t)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G})^2}}.$$

Aux valeurs de t tirées de l'équation

$$(4)\qquad (f'+gt)(\mathcal{E}+\mathcal{F}t)-(e+ft)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)=0$$

correspondent deux rayons infiniment voisins du rayon de départ dont les plus courtes distances à ce rayon sont des infiniment petits d'ordre supérieur.

Nous trouvons, en développant l'équation (4),

$$(5)\ (g\mathcal{F}-f\mathcal{G})t^2+[g\mathcal{E}-(f+f'_1)\mathcal{F}-e\mathcal{G}]t+f'\mathcal{E}-e\mathcal{F}=0.$$

Désignons par τ_1 et τ_2 les racines de cette équation, nous aurons

$$(6)\quad \tau_1+\tau_2=\frac{-g\mathcal{E}+(f-f')F+e\mathcal{G}}{g\mathcal{F}-f\mathcal{G}},\quad \tau_1\tau_2=\frac{f'\mathcal{E}-e\mathcal{F}}{g\mathcal{F}-f\mathcal{G}}.$$

L'équation quadratique (5) n'a pas toujours ses racines réelles. Ces racines sont réelles ou imaginaires, selon la relation caractéristique du système de rayons dans l'espace. Il y a donc à considérer deux catégories de systèmes de rayons. Celle où tout rayon est coupé par deux rayons infiniment voisins, et celle où cette intersection n'a lieu pour aucun rayon infiniment voisin. Il existe une troisième catégorie de systèmes, c'est celle où certains rayons sont coupés par deux rayons infiniment voisins et où d'autres rayons ne sont coupés par aucun rayon infiniment voisin.

Les deux points où un rayon est coupé par deux rayons infiniment voisins seront nommés *foyers* de ce rayon. Ces points seront réels quand τ_1 et τ_2 le seront. On obtient les abscisses des foyers en mettant dans l'expression générale de l'abscisse du point d'un rayon le plus voisin d'un rayon infiniment voisin, les valeurs de τ_1 et de τ_2. Désignons les abscisses des foyers par ρ_1 et ρ_2, nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-[e+(f+f')t_1+g\tau_1^2]}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}\tau_1+\mathcal{G}\tau_1^2},\\ \rho_2 &= -\frac{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}\tau_2+\mathcal{G}\tau_2^2}.\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs peuvent se mettre sous la forme suivante, au moyen de l'équation (4) :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{e+f\tau_1}{\mathcal{E}+\mathcal{F}\tau_1} = -\frac{f'+g\tau_1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\tau_1},\\ \rho_2 &= -\frac{e+f\tau_2}{\mathcal{E}+\mathcal{F}\tau_2} = -\frac{f'+g\tau_2}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\tau}.\end{aligned}\right.$$

Si entre ces équations on élimine τ_1 et τ_2, on trouve une équation quadratique dont les racines sont ρ_1 et ρ_2 :

$$(9)\quad (\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)r^2+[g\mathcal{E}-(f+f')\mathcal{F}+e\mathcal{G}]r+eg-ff'=0;$$

on a donc

$$(10)\quad \rho_1+\rho_2 = -\frac{g\mathcal{E}-(f+f')\mathcal{F}+e\mathcal{G}}{\Delta^2},\quad \rho_1\rho_2=\frac{eg-ff'}{\Delta^2}.$$

Si l'on compare l'équation quadratique dont les racines sont ρ_1 et ρ_2 à l'équation dont les racines sont les abscisses des points limites des plus courtes distances, on trouve

$$(11)\qquad \rho_1+\rho_2 = r_1+r_2,$$

$$(12)\qquad \rho_1\rho_2 = r_1r_2+\frac{(f-f')^2}{4\Delta^2}.$$

La première de ces équations donne le théorème suivant :

Le point milieu de la distance des deux foyers d'un rayon coïncide avec le point milieu des deux points limites de ce rayon.

Nous nommerons ce point milieu commun *centre du rayon*.

Soit δ la distance du centre d'un rayon à ses foyers; on a

$$(13) \qquad d = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Les quatre longueurs r_1, r_2, ρ_1, ρ_2, peuvent s'exprimer en fonction de m, δ et d (11) et (18) (§ II) :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} r_2 = m + d, & r_1 = m + d, \\ \rho_2 = m + \delta, & \rho_1 = m - \delta; \end{array} \right.$$

et l'équation (12) donne

$$(15) \qquad d^2 - \delta^2 = \frac{(\mathrm{f} - \mathrm{f}')^2}{4\Delta^2}.$$

De là résulte ce théorème :

La distance de deux foyers d'un rayon n'est jamais plus grande que celle de ses points limites.

Ainsi les foyers sont toujours compris entre les points limites ou coïncident avec eux.

Nous nommerons *plans focaux* d'un rayon les plans qui passent par ce rayon et renferment aussi l'un ou l'autre des rayons infiniment voisins qui coupent le rayon donné.

Ces plans sont réels quand les foyers le sont. Leur position relative par rapport aux plans principaux est définie de la manière la plus simple par l'équation

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega,$$

d'où l'on tire

$$(16) \qquad \cos^2\omega = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \qquad \sin^2\omega = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Si l'on fait $r = \rho_1$, ω est l'angle que fait le premier plan focal avec le premier plan principal; si l'on fait $r = \rho_2$, ω est l'angle du second plan focal avec le pre -

mier plan principal. Nommons ω_1 et ω_2 ces deux angles, $\omega_2 - \omega_1 = \gamma$ sera l'angle des deux plans focaux.

On a

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{ll} \cos^2\omega_1 = \dfrac{r_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_1 = \dfrac{\rho_1 - r_1}{r_2 - r_1}, \\[2ex] \cos^2\omega_2 = \dfrac{r_2 - \rho_2}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_2 = \dfrac{\rho_2 - r_1}{r_2 - r_1}. \end{array}\right.$$

Si l'on remplace dans ces formules les abscisses des foyers et des points limites par leurs valeurs en fonction de m, d et δ, on obtient

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\omega_1 = \sin\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{2d}}, \\[2ex] \cos\omega_2 = \sin\omega_1 = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{2d}}. \end{array}\right.$$

Donc $\omega_1 = \frac{1}{2}\pi - \omega_2$. Et, puisque les plans principaux sont rectangulaires, l'angle du second plan focal avec le second plan principal est $\frac{1}{2}\pi - \omega_2 = \omega_1$. De là ce théorème :

Les deux plans focaux d'un rayon sont situés symétriquement par rapport à ses plans principaux, de sorte que le plan bissecteur de l'angle des plans focaux est le même que celui de l'angle des plans principaux.

Pour l'angle $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ des plans focaux, on a

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{1}{2}\pi - 2\omega_1 = 2\omega_2 - \dfrac{1}{2}\pi, \\[2ex] \omega_1 = \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\gamma, \quad \omega_2 = \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\gamma. \end{array}\right.$$

Donc

$$\sin\gamma = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \sin^2\omega_1,$$

$$\cos\gamma = \sin 2\omega_1 = 2\sin\omega_1\cos\omega_1,$$

d'où, d'après les équations (18),

$$\sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d}.$$