Nouvelles annales de mathématiques

J. Vieille

Note sur une forme de l'équation du second degré à deux variables propre à la résolution de diverses questions concernant les coniques tangentes à plusieurs droites données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 236-242

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__236_0>

NOTE
sur une forme de l'équation du second degré à deux variables propre à la résolution de diverses questions concernant les coniques tangentes à plusieurs droites données ;

PAR M. J. VIEILLE.

Le dernier numéro des *Annales* renferme (p. 119) une démonstration du théorème de Newton sur les coniques inscrites à un quadrilatère par M. Vannson. Cette démonstration, quoique simple, ne me paraît pas procéder assez directement des formules ordinaires de la géométrie analytique, parce qu'elle repose sur la considération d'un faisceau harmonique.

Ne serait-il pas utile de montrer aux élèves que le théorème dont il s'agit, ainsi que plusieurs autres propriétés des coniques tangentes à des droites données, peuvent se déduire aisément de l'équation

$$(1) \qquad (px+qy-1)^2+\lambda xy=0.$$

Cette équation convient, comme on sait, à toute conique tangente à deux droites OA, OB, prises pour axes des coordonnées. La corde de contact AB a pour équation

$$px+qy-1=0,$$

où les constantes p, q, désignent les inverses des distances OA, OB ; λ est une troisième constante arbitraire.

Si l'on veut que la conique soit de plus tangente à deux nouvelles droites dont les équations sont

$$\alpha x+\beta y=1,$$
$$\alpha' x+\beta' y=1;$$

on aura entre p, q et λ les deux relations

$$\lambda + 4(p - \alpha)(q - \beta) = 0, \tag{2}$$

$$\lambda + 4(p - \alpha')(q - \beta') = 0, \tag{3}$$

qui ne laissent plus subsister qu'une seule constante arbitraire.

Maintenant, soient x et y les coordonnées du centre C de la conique. Comme on sait que la droite OC, qui joint le centre au point de concours de deux tangentes, divise la corde de contact AB en deux parties égales, on aura

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{p}{q},$$

ou

$$qy - px = 0. \tag{4}$$

Pour achever de définir le centre, il suffit d'associer à cette équation, celle qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée relative à x du premier membre de l'équation (1), soit

$$\lambda y + 2p(px + qy - 1) = 0. \tag{5}$$

L'équation du lieu des centres résultera de l'élimination de p, q et λ entre les équations (2), (3), (4) et (5).

On retranche d'abord (3) de (2); λ disparaît ainsi que le terme en pq, et l'on a

$$p(\beta' - \beta) + q(\alpha' - \alpha) + \alpha\beta - \alpha'\beta' = 0. \tag{6}$$

Puis, si l'on remplace dans (2) et (5), q par sa valeur $\frac{px}{y}$, et que l'on retranche l'une de l'autre les deux équations résultantes, λ disparaît encore avec le terme en p^2, et il vient

$$(7) \qquad p(2\alpha x + 2\beta y - 1) - 2\alpha\beta y = 0.$$

Il ne reste plus qu'à tirer p et q des équations (7) et (4), puis à reporter ces valeurs dans (6), et l'on a l'équation du lieu

$$2\beta\beta'(\alpha - \alpha')y + 2\alpha\alpha'(\beta - \beta')x + \alpha'\beta' - \alpha\beta = 0.$$

Elle représente une droite passant par les milieux des trois diagonales du quadrilatère circonscrit. C'est le théorème de Newton.

Corollaires.

I. — Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et l'une d'elles en un point donné A, se déduit du précédent, en regardant le triangle formé par les trois tangentes comme la limite d'un quadrilatère dont deux côtés contigus au sommet A sont amenés à faire entre eux un angle égal à deux droits. Alors on a ce théorème :

Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et l'une d'elles en un point donné A, est la droite qui passe par le milieu du côté du triangle formé par les trois tangentes sur lequel est situé le point A, et par le milieu de la ligne qui joint le point A au sommet opposé du triangle.

II. — Si l'on regarde la corde de contact AB de deux tangentes à une conique comme limite de la diagonale d'un quadrilatère circonscrit, dont deux angles ayant leurs sommets aux extrémités de cette diagonale sont devenus égaux à deux droits, en même temps que les deux autres sommets opposés sont venus se confondre en un seul, point de concours des deux tangentes considérées, on retrouve la proposition dont nous nous sommes servis plus haut, savoir que

Le lieu des centres des coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés est la droite qui joint le point de concours des tangentes au milieu de la corde de contact. — Etc.

Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent par un point donné.

Une partie notable du calcul précédent subsiste, savoir :

Équation de la conique tangente aux deux axes des coordonnées,

$$(1)\qquad (px+qy-1)^2+\lambda xy=0;$$

Condition de contact de la troisième droite, dont l'équation est $\alpha x+\beta y=1$,

$$(2)\qquad \lambda+4(p-\alpha)(q-\beta)=0;$$

Équations du premier degré entre p et q,

$$(4)\qquad qy-px=0,$$

$$(7)\qquad p(2\alpha x+2\beta y-1)-2\alpha\beta y=0,$$

dans lesquelles x et y désignent les coordonnées du centre.

Seulement, au lieu de l'équation (6) qui était également du premier degré entre p et q, on a l'équation

$$(8)\qquad (px'+qy'-1)^2+\lambda x'y'=0,$$

dans laquelle x', y' désignent les cordonnées du point donné.

Si l'on remplace dans cette équation λ par la valeur tirée de (2), il vient

$$(9)\qquad (px' + qy' - 1)^2 - 4(p-\alpha)(q-\beta)x'y' = 0.$$

On tirera comme plus haut des équations (4) et (7) les valeurs de p et q, que l'on substituera dans (9) et l'on aura pour équation du lieu

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad [2\alpha\beta(x'y + y'x) - 2(\alpha x + \beta y) + 1]^2 \\ - 4\alpha\beta(1 - 2\alpha x)(1 - 2\beta y)x'y' = 0. \end{array}\right.$$

C'est l'équation d'une conique.

Le binôme caractéristique $B^2 - 4AC$ se réduit, abstraction faite d'un facteur positif, à

$$\alpha\beta x'y'(\alpha x' + \beta y' - 1);$$

il s'annule dans cinq cas, savoir :

pour $x' = 0$, ou $y' = 0$, ou $\alpha x' + \beta y' = 1$, ou $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$,

c'est-à-dire quand le point donné, commun à toutes les coniques, coïncide avec l'un des trois points de contact; ou bien quand deux des trois tangentes sont parallèles entre elles.

Dans ces diverses hypothèses, le lieu des centres n'est plus une courbe, il se réduit à une seule droite (variété du genre parabole); et c'est ce que l'on pouvait prévoir, soit en vertu du corollaire du théorème de Newton, démontré plus haut, soit en vertu de cette propriété que le centre d'une conique est équidistant de deux tangentes parallèles.

Si nous écartons ces cas particuliers, la conique représentée par l'équation (10) appartiendra à l'un des genres ellipse ou hyperbole, selon que le produit

$$x'y'(\alpha x' + \beta y' - 1)$$

sera négatif ou positif (car on peut toujours supposer les constantes α et β positives). Il suit de là que si le point donné est dans l'intérieur du triangle formé par les tangentes, ou bien dans l'un des angles opposés par le sommet à ceux de ce triangle, la courbe lieu des centres sera une ellipse; si le point donné est dans les trois autres régions du plan, le lieu des centres sera une hyperbole.

D'après la forme de l'équation (10), on voit que les droites qui ont pour équations

$$x = \frac{1}{2\alpha}, \quad y = \frac{1}{2\beta},$$

sont des tangentes au lieu des centres; car, en faisant $x = \frac{1}{2\alpha}$ dans (10), l'équation en y a évidemment ses racines égales. Il en est de même de l'équation en x qui résulte de $y = \frac{1}{2\beta}$. Ces tangentes ne sont autres que deux des droites qui joignent les milieux des côtés du triangle formé par les trois tangentes données. Comme rien ne distingue un côté d'un autre, on a ce théorème :

Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent par un point donné, est inscrit au triangle que l'on obtient en joignant les milieux des côtés du triangle formé par les trois droites.

Il est à remarquer que ce triangle circonscrit au lieu des centres ne dépend en rien de la position du point donné par lequel passent toutes les coniques. Seulement les points de contact changeront avec la position de ce point.

Ainsi, toutes les coniques lieux des centres des coniques qui touchent trois droites fixes et passent en outre par un point *qui varie d'une conique à une autre* sont constamment inscrites à ce même triangle.

Il est aisé de construire le centre du lieu représenté par l'équation (10). A cet effet, on divise membre à membre les équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées relatives à x et à y, et l'on a

$$\frac{2\alpha x - 1}{2\beta y - 1} = \frac{\alpha x' - 1}{\beta y' - 1},$$

équation d'une droite contenant le centre du lieu. On voit qu'elle passe par les points

$$\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right), \left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}\right),$$

c'est-à-dire par le milieu de la ligne qui joint l'origine au point donné (x', y'), et par le milieu du segment de la tangente interceptée entre celles qui ont été prises pour axes. Comme les axes peuvent être pris de trois manières, on aura immédiatement trois droites qui se couperont *en un même point*, centre du lieu. (Nous rencontrons ici un théorème de géométrie élémentaire qu'il est superflu d'énoncer.)

Ce centre ne pourra coïncider avec le point donné, qu'autant que celui-ci sera le point d'intersection des trois médianes (ou centre de gravité) du triangle formé par les trois tangentes. Etc.

Ces exemples suffisent pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'équation (1), pour la recherche des propriétés des coniques tangentes à plusieurs droites fixes.

Note du Rédacteur. Voir Salmon, *Conic Sections*, 3e édit., 1855.