

GERONO

Réponse à une lettre sur cette question : on donne le foyer F et un point M d'une parabole ; trouver le lieu géométrique du sommet

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20 (1861), p. 233-235

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__233_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPONSE A UNE LETTRE SUR CETTE QUESTION :

*On donne le foyer F et un point M d'une parabole ;
trouver le lieu géométrique du sommet.*

L'auteur de la lettre (*) demande quelques mots d'explication au sujet du résultat auquel conduit le calcul que voici :

« En prenant pour origine le point F, pour axe des abscisses la droite FM, et posant $FM = d$, l'équation d'une parabole dont F est le foyer, et qui passe par le point M, est

$$(1) \quad y^2 + x^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

en ayant égard aux conditions

$$(2) \quad l^2 + m^2 = 1,$$

$$(3) \quad d^2 - (ld + n)^2 = 0.$$

» L'axe de la parabole est représenté par

$$(4) \quad mx - ly = 0.$$

(*) Je regrette, pour plus d'un motif, de ne pas être autorisé à faire connaître son nom.

On aura donc l'équation du lieu géométrique du sommet, en éliminant l , m , n entre les quatre relations précédentes.

» Or les équations (2) et (4) admettent la solution commune :

$$l = + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad m = + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

et si l'on remplace l , m par ces expressions fractionnaires dans l'équation (1) écrite sous cette forme :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = lx + my + n,$$

il en résulte

$$n = 0.$$

Alors, l'équation de la directrice

$$lx + my + n = 0$$

se réduit à

$$lx + my = 0,$$

et comme cette dernière équation est vérifiée par les coordonnées de l'origine, on arrive à cette conclusion que *la directrice passe par le foyer.* »

Je réponds que les équations (1), (2), (3) ne représentent plus une parabole quand $n = 0$. Car, dans ce cas, les équations (3) et (2) donnent

$$l^2 = 1 \quad \text{et} \quad m = 0,$$

et par suite l'équation (1) devient

$$y = 0.$$

C'est-à-dire que la parabole se réduit à la droite FM.

On peut encore observer que n représente la distance du foyer à la directrice, et par conséquent le demi-paramètre de la parabole. D'où il suit que $n = 0$ est précisé-

ment la condition pour que la parabole se réduise à son axe.

En prenant pour valeurs de l et de m les expressions

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{et substituant dans}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = lx + my + n,$$

il vient

$$n = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

formule dont l'exactitude se vérifie immédiatement, puisqu'elle exprime que le demi-paramètre est le double de la distance du foyer au sommet

Pour obtenir l'équation cherchée, il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation (3) l et n par $\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Il est à remarquer que le lieu géométrique des sommets des paraboles considérées est celui des milieux des perpendiculaires abaissées d'un point d'une circonférence sur les tangentes à la courbe, car ces paraboles ont pour directrices les tangentes à la circonférence décrite du point M comme centre avec MF pour rayon, et leurs sommets divisent en parties égales les perpendiculaires abaissées du foyer commun F sur les directrices. G.
