MOURGUES

Problème du concours général en logique scientifique (1860)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 22-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__22_1>

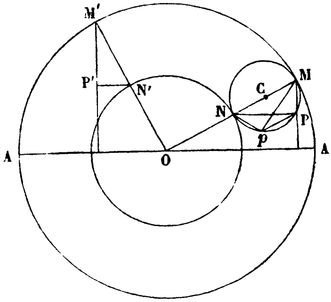
PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL EN LOGIQUE SCIENTIFIQUE (1860);

Par M. MOURGUES,
Professeur au lycée Napoléon.

Étant donnés deux circonférences concentriques, un diamètre fixe, et deux rayons formant un angle droit mobile autour du centre, on mène de M et M′ des perpendiculaires, et de N et N′ des parallèles au diamètre fixe. Quel est le maximum de l'angle POP′?

Après avoir remarqué qu'il suffit d'étudier les varia-

FIG. 1.

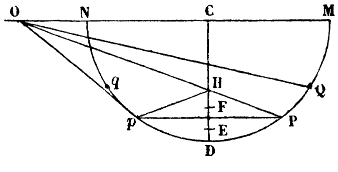


tions de la somme angulaire MOP + M'OP', je décris une circonférence de diamètre MN, je mène Pp parallèle à ce diamètre, et je substitue à la somme précédente la somme plus commode MOP + MOp, qui lui est équivalente. En effet, les triangles rectangles de même hypoténuse M'N'P', MNp sont égaux, comme équiangles au triangle MNP. Par suite, les triangles OM'P', OMp ont un angle égal compris entre côtés égaux, d'où résulte l'égalité des angles MOP', MOp.

Par là, la question posée devient un corollaire de la suivante :

Étant pris un point O sur le prolongement d'un dia-

FIG. 2.



mètre d'un cercle, et une corde parallèle à ce diamètre, comment varie la somme $MOP + MOp$, avec la position de cette corde?

Soient Pp, Qq deux positions de la corde mobile, et CD perpendiculaire à MN. Des deux circonférences passant l'une par O, P et p, l'autre par O, q et Q, et ayant une corde commune au-dessus de MN, la seconde sera intérieure à la première en dessous de MN, et coupera CD en un point F, tandis que l'autre la coupera en un point E. Les points E et F étant les milieux des arcs pEP, qFQ, OE, OF seront les bissectrices des angles pOP, qOQ, d'où il suit que

$$MOP + MOp > MOQ + MOq.$$

Ainsi la somme angulaire considérée croît avec la distance de la corde au centre, et devient maximum quand la corde devient tangente.

La somme $OP + Op$ varie dans le même sens, car elle n'est autre chose que le périmètre du triangle OHp. Or, E étant le centre du cercle exinscrit à ce triangle, le demi-périmètre est la projection de OE sur OP, comme la projection de OF sur OQ serait la moitié de $OQ + Oq$. Mais la projection de OE sur OP étant supérieure à celle de OE sur OQ, est à fortiori supérieure à celle de OF sur OQ.

Cela se déduirait encore de ce fait que $Op^2 + OP^2$ a une valeur constante, comme l'indiquent les deux triangles OCp, OCP.

Revenant maintenant à la question proposée en premier lieu, on voit que l'angle AOM variant de 0 à 45°, MP variera depuis 0 jusqu'à la corde d'un quadrant, et la corde pP s'éloignera du diamètre MN jusqu'à devenir tangente, et MOA doit égaler un demi-droit.