Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Théorème sur le tétraèdre (voir p. 63)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 222-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__222_1>

THÉORÈME SUR LE TÉTRAÈDRE

(voir p. 63),

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie

Le théorème démontré par M. Le Besgue (p. 63) est un cas particulier du suivant que j'emploie habituellement dans la géométrie algorithmique pour mesurer la distance d'un point à un plan (*).

THÉORÈME. *Si l'on désigne par* a, b, c, d *les aires des faces d'un tétraèdre* ABCD; *par* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, *les distances de ses sommets à un plan* P; *par* α, β, γ, δ *les distances d'un point* M *aux faces du tétraèdre, la distance* μ *du point* M *au plan* P *est donnée par la relation*

$$\mu = \frac{1}{3V}(a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta)$$

dans laquelle V *indique le volume du tétraèdre* ABCD.

Lorsque le point M est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre, on a le théorème démontré par M. Le Besgue.

La vérification de notre formule est facile. Prenant le tétraèdre ABCD pour tétraèdre de *référence*, l'équation du plan P peut s'écrire sous la forme

$$a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta = 0;$$

(*) Le théorème est de M. Joseph Harcourt et non de M Le Besgue (t. XIX, p. 439) il est déterminé par ses distances aux sommets du tétraèdre. Il résulte de là que la distance d'un point $M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ à ce plan s'exprimera par la fonction qui forme le premier membre de l'équation précédente, divisée par une certaine quantité Q indépendante de la position du point M. Si pour déterminer Q nous donnons au point M une position particulière, s'il coïncide, par exemple, avec le sommet A du tétraèdre pour lequel

$$\alpha = \frac{3\mathrm{V}}{a}, \quad \beta = \gamma = \delta = 0, \quad \mu = \alpha_1,$$

on trouvera

$$\mathrm{Q} = 3\mathrm{V};$$

donc, etc.

Si l'on cherche la valeur de Q en fonction des distances $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, on trouve

$$\mathrm{Q}^2 = (3\mathrm{V})^2 = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2 + d\delta_1^2$$
$$- 2\sum ab\,\alpha_1\beta_1 \cos(a, b),$$

en indiquant par (a, b) l'angle des faces du tétraèdre opposées aux sommets A et B, le signe $\sum$ s'étendant aux six produits analogues à celui qui est écrit.

La relation ci-dessus est celle qui existe toujours entre les distances des sommets d'un tétraèdre à un plan.

Remarque. Dans la géométrie algorithmique, on trouve de grands avantages à se donner un plan ou une droite comme nous venons de le faire. Toutes les formules fondamentales deviennent alors d'une très-grande simplicité. Bornons-nous à considérer pour le moment ce qui a lieu dans la géométrie plane.

Nous prenons le triangle ABC dont les longueurs des côtés sont a, b, c, pour triangle de référence ; une droite dont les distances aux sommets ABC sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aura pour équation

$$a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma = 0,$$

α, β, γ étant les distances d'un de ses points aux côtés du triangle de référence. Appelons cette droite la droite 1; remplaçant l'indice 1 par 2, on aura le droite 2, etc.

Posons

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = P, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_3,$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_1, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_2.$$

S étant l'aire du triangle de référence, S' celle du triangle formé par les droites 1, 2, 3 on a

$$S' = S\frac{P_2}{P_1 P_2 P_3}, \quad \sin(1,2) = \frac{P_3}{2S}.$$

Soit δ la distance de deux points pris sur la droite 1 déterminés par les intersections des droites 2 et 3 avec 1, on a

$$\delta = 2S\frac{P}{P_2 P_3},$$

parce que la distance du point d'intersection des droites 2 et 3 à la droite 1 est donnée par la relation

$$h = 2S\frac{P}{P_1}.$$

Soient R' le rayon du cercle circonscrit au triangle 1, 2, 3,

r' le rayon du cercle inscrit :

$$R' = 2S^2 \frac{P}{P_1 P_2 P_3}, \quad r' = \frac{P}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

La géométrie de l'espace offre des résultats semblables, sur lesquels je pourrai revenir dans une autre occasion.

Note de Rédacteur. Il faut se rappeler que, dans la géométrie algorithmique, un point est donné *dans un plan* par ses *trois distances* aux côtés d'un triangle *fixe* dit de *référence*, et *dans l'espace* par *quatre distances* aux quatre faces d'un tétraèdre *fixe* dit de *référence*.