NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAURE

Sur le problème d'optique et deux théorèmes sur des triangles et des coniques combinés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 212-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__212_0>

SUR LE PROBLÈME D'OPTIQUE (p. 44) ET DEUX THÉORÈMES SUR DES TRIANGLES ET DES CONIQUES COMBINÉS;

PAR M. LE CAPITAINE FAURE

Il s'agit de trouver le lieu d'un point d'où l'on voit deux segments donnés sous le même angle.

Cette question a déjà été traitée par MM. Salmon et Chasles. Le lieu du point est une courbe du troisième ordre (*Comptes rendus*, t. XXXVII, séances des 5 et 19 septembre 1853).

Proposons-nous ce problème plus général : Étant donnés sur un plan m segments, trouver le lieu d'un point d'où l'on voit ces segments sous des angles tels, que leurs tangentes aient entre elles une *relation* quelconque.

Soient a la longueur de l'un des segments AB, φ l'angle formé par les droites qui joignent ses extrémités à un point P. Si l'on désigne par ρ et ρ' les longueurs de ces deux lignes,

$$a^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\tang\varphi = \frac{2a.\alpha}{\overline{pi}^2 - \frac{a^2}{4}},$$

le point i étant le milieu du segment, α la distance de ce segment au point P; $2a\alpha$ est le double de l'aire du triangle PAB.

Traçons dans le plan de la figure deux axes rectangulaires et soit

$$A = 0$$

l'équation du cercle décrit sur le segment a comme diamètre, $\alpha = 0$ sera l'équation de ce segment (*).

On aura

$$\operatorname{tang}\varphi = 2a\,\frac{\alpha}{A}.$$

Les autres segments donneront des relations analogues; ainsi pour le segment b on aurait

$$\operatorname{tang}\varphi' = 2b\,\frac{\beta}{B}, \ldots$$

Substituant ces valeurs dans la relation donnée de l'ordre n, on obtient le lieu du point P.

Cherchons comme cas particulier le lieu d'un point d'où l'on voit trois segments donnés sous des angles dont la somme soit un multiple de π.

La relation entre les tangentes des trois angles sera

$$\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi' + \operatorname{tang}\varphi'' = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi''$$

et par conséquent le lieu cherché

$$a\frac{\alpha}{A} + b\frac{\beta}{B} + c\frac{\gamma}{C} = abc.\frac{\alpha.\beta.\gamma}{A.B.C}$$

est une courbe du cinquième ordre, qui passe par les extrémités des segments et qui a deux points doubles à l'infini sur un cercle.

(*) Soient x, y les coordonnées de P, $x'\,y'$ les coordonnées du point i, et soit

$$mx + ny - p = 0$$

l'équation de AB; alors

$$\alpha = k(mx + ny - p),$$

k constante connue; le dénominateur de $\operatorname{tang}\varphi$ est égal à

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - \frac{a^2}{4},$$

équation du cercle A, lorsqu'on égale cette expression à zéro. TM.

Généralement le lieu d'un point d'où l'on voit m segments sous des angles dont la somme est un multiple de π est une courbe de l'ordre $2m-1$, qui a les points à l'infini sur un cercle pour points multiples de l'ordre $m-1$, et qui passe par les extrémités des segments.

De là on peut conclure qu'étant donné un polygone de $2m$ côtés, il existe

$$4m(m-2)+3$$

points d'où l'on voit les côtés de rang pair et les côtés de rang impair sous des angles dont la somme soit la même (*).

Il serait facile de généraliser davantage notre énoncé primitif en substituant des coniques aux segments. Soient en effet

$$A=0$$

l'équation d'une de ces coniques,

$$A'=0$$

l'équation du cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette conique. Si l'on remplace dans ces équations les coordonnées variables par celle d'un point d'où l'on voit la conique sous un angle φ, on a

$$\overline{\tan \varphi}^2 = a\frac{A}{A'^2},$$

(*Nouvelles Annales*, t. II, p. 112)

a étant un coefficient numérique connu.

Par exemple, le lieu du point d'où l'on voit les coniques A et B sous un même angle est

$$aAB'^2 - bBA'^2 = 0,$$

(*) Pour m segments vus sous des angles dont la somme est constante, le lieu est de l'ordre $2m$ et passe par les extrémités des segments.

(FAURE.)

courbe du sixième degré qui a pour points doubles les points à l'infini sur un cercle, elle touche de plus chaque conique aux points imaginaires où elle est coupée par le cercle qui lui correspond, etc (*).

THÉORÈME. *Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, quatre fois le produit des carrés de ses demi-axes principaux pris en signe contraire est égal au diamètre du cercle circonscrit au triangle, multiplié par le produit des distances de son foyer* F *aux côtés du triangle, puis par le produit des carrés des distances de ce foyer aux sommets du triangle et divisé par la sixième puissance de la tangente menée de ce foyer au cercle circonscrit au triangle.*

Ce théorème donne tout de suite le lieu du foyer des coniques de même aire inscrite dans un triangle : c'est une courbe du neuvième degré.

THÉORÈME. *Étant donnés une conique et un triangle conjugué à cette conique, quatre fois le produit des carrés de ses demi-axes principaux est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle, multiplié par le produit des distances de son foyer* F *aux côtés de ce triangle, puis par le produit des carrés des tangentes menées de ce foyer aux cercles décrits sur les côtés du triangle comme diamètre et divisé par la sixième puissance de la tangente menée du même foyer au cercle des neuf points relatifs au triangle.*

(*) La même question pour des surfaces du second degre mène a des aires de coniques sphériques, à des intégrales elliptiques; belle question *sérieusement* académique. Même une solution *partielle* pourrait être couronnée comme naguère le théorème Fermat. La connexion avec le problème des éclipses est evidente.