NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 206-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__206_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE
du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n;

Par M. E. DE JONQUIÈRES (*).

Cette question, du moins dans le cas où l'angle circonscrit est droit, a occupé d'éminents géomètres, et a fait

(*) Au Pirée, 20 décembre 1860.

récemment, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XVIII, p. 314), le sujet d'un article où M. George Salmon s'est proposé de rectifier les assertions de MM. Steiner et Dewulf.

Cependant M. Terquem fait suivre l'article dont il s'agit, d'une *Note* qui se termine par ces mots : « Il reste donc » encore quelque chose à éclaircir dans cette question. » Je le crois aussi ; et c'est ce qui m'a engagé à m'en occuper. Mais si j'ai réussi, comme je l'espère, à dissiper les quelques nuages qui y jétaient encore un peu d'obscurité, j'ai du moins la satisfaction d'arriver à cette conclusion que MM. Steiner, Dewulf et Terquem n'ont pas moins raison que M. Salmon, et que les dissidences de ces savants géomètres, plus apparentes que réelles, disparaissent à l'aide d'une simple remarque.

Pour mieux me faire entendre, je reprends la question de plus haut, en la traitant dans toute sa généralité. Supposons donc qu'on demande :

Quel est le degré du lieu des points de rencontre des tangentes à une courbe U *de la classe* n, *issues des points correspondants de deux divisions homographiques, données respectivement sur deux droites* L, L'?

Pour abréger le discours, nous appellerons *tangentes correspondantes* les tangentes ainsi déterminées.

On va chercher en combien de points ce lieu rencontre une droite quelconque M. Pour cela, il est nécessaire de rappeler le lemme suivant.

Lemme. Si l'on joint un point fixe P à tous les points a', b', etc., de la droite L', par des droites qui rencontrent la droite M en des points α, β, etc., les droites αa, βb, etc., qui joignent les points α, β, etc., aux points a, b, etc., de L, homologues de a', b', etc., enveloppent une conique (*Géom.*, *sup.*, n° 555).

Actuellement, supposons qu'on fasse rouler une tangente sur la courbe donnée U. Dans chacune de ses positions, cette tangente passe par un certain point a de L, et coupe M en un point α. Si l'on joint le point α au point a', homologue de a, je dis que la droite $\alpha a'$ enveloppe une courbe U' de la *classe* $2n$, c'est-à-dire une courbe à laquelle on peut mener généralement $2n$ tangentes par un point quelconque P. Et en effet, ce nombre est évidemment le même que celui des tangentes communes à la conique, dont il est question dans le lemme précédent, et à la courbe donnée U, c'est-à-dire qu'il est $2n$.

Si le côté $\alpha a'$ de l'angle variable $a\alpha a'$ touchait aussi la courbe U, le point α serait l'un x des points de M qui appartiennent au lieu cherché. Donc il existe sur M autant de ces points x que les deux courbes U et U' ont de tangentes communes, c'est-à-dire $2n \,.\, n = 2n^2$. Tel est donc enfin le degré de la courbe qu'il s'agissait de trouver.

Mais j'ajoute que parmi les diverses branches de ce lieu géométrique il y a $2n$ droites, de sorte que, si l'on fait abstraction de ces droites, la courbe n'est plus que du degré $2n(n-1)$.

En effet, les droites aa' qui joignent les points correspondants de L et L' enveloppent une conique Σ, qui a $2n$ tangentes communes avec la courbe U. Chacune de ces tangentes est une droite, suivant laquelle coïncident deux des tangentes *correspondantes* de la courbe U. Donc tous ces points satisfont à l'énoncé de la question, et par conséquent ils appartiennent au lieu cherché. C. Q. F. D.

Si les deux droites L, L' coïncident en une seule L, les résultats précédents subsistent, et les $2n$ droites qui font partie du lieu, sont les $2n$ tangentes à la courbe U issues des deux *points doubles* (réels ou imaginaires) des deux divisions homographiques tracées sur L. On voit en outre que chacun de ces deux points est, sur la courbe proprement dite du degré $2n(n-1)$, multiple de l'ordre

$n(n-1)$; car chacune des n tangentes à la courbe U, qu'on peut mener par ce point, étant considérée comme appartenant à la première série de tangentes, est coupée, en ce point même, par les $(n-1)$ autres, considérées comme appartenant à la seconde série.

Si la droite L est à l'infini et que les deux divisions homographiques soient celles que marquent sur cette droite les deux côtés d'un angle constant (voir *Géom. sup.*, n° 652, p. 462), le théorème subsiste; mais comme les points doubles de ces divisions sont alors imaginaires, les $2n$ droites le sont aussi et l'on a ce théorème :

La courbe, lieu du sommet d'un angle de grandeur constante, circonscrit à une courbe de la classe N, *est du degré* $2n(n-1)$.

Ce qui précède montre bien comment le degré $2n^2$ a dû se présenter dans l'analyse de M. Dewulf ou dans les raisonnements de M. Steiner. C'est au fond le degré de la question, et ce degré ne s'abaisse que par l'exclusion, fort naturelle d'ailleurs, de certaines droites qui précisément sont toujours imaginaires dans ce cas particulier.

Si la droite située à l'infini est tangente de la courbe U, qui est alors du genre parabolique, chacun des points de cette droite appartient $2(n-1)$ fois au lieu cherché. Car la droite de l'infini ayant une direction indéterminée peut être regardée comme rencontrant sous l'angle donné, et aussi sous le supplément de cet angle, chacune des $(n-1)$ autres tangentes parallèles entre elles qu'on peut encore mener de ce point à la courbe, en outre de la droite de l'infini qui fait la $n^{ième}$ tangente issue de ce point. Le degré apparent du lieu cherché n'est donc plus égal qu'à $2(n^2-2n+1)=2(n-1)^2$, si l'on fait abstraction de cette droite multiple.

Actuellement, si l'angle donné s'approche successivement d'être égal à 90 degrés, les points de la courbe se rapprochent l'un de l'autre deux à deux. Quand il diffère très-peu de cette valeur, la courbe se compose de deux branches très-voisines l'une de l'autre, qui se confondent enfin en une seule au moment où l'angle devient droit. La courbe est alors la superposition de deux courbes de l'ordre $n(n-1)$, ce qui a fait dire à M. Salmon que son degré dans ce cas est $n(n-1)$, puisqu'en effet il n'apparaît qu'une telle courbe.

Ceci se voit, par exemple, très-clairement si la courbe proposée U est une conique. Dans ce cas on obtient immédiatement, sur chacune des tangentes de la conique, les quatre points du lieu cherché en lui menant les quatre tangentes parallèles deux à deux sous l'angle donné et sous son supplément (*). Or il est visible qu'à mesure que l'angle s'approche de 90°, les pieds de ces quatre tangentes se rapprochent deux à deux et se confondent enfin quand l'angle devient droit. On sait que le lieu est alors devenu un cercle. Mais comme la courbe du quatrième ordre n'a pu que se transformer par cette circonstance particulière, et non pas abdiquer pour un degré inférieur, ce cercle est *double*, ainsi que M. Terquem en avait fait la remarque expresse et que M. Steiner l'avait suffisamment fait pressentir (**), et les réflexions qui précèdent ne permettent plus, ce me semble, le moindre doute à ce sujet.

Bien qu'il puisse paraître superflu de chercher dans des cas très-particuliers la vérification d'un théorème établi par des raisonnements rigoureux, néanmoins j'examine-

---

(*) Cette double direction est conforme a l'enoncé du problème qui ne précise pas et qui ne peut préciser si ce sont les côtés mêmes de l'angle ou leurs prolongements qui doivent toucher la courbe donnée.

(**) *Voir* le Mémoire de M. Steiner sur les courbes algébriques, traduit ans le *Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 48.

rai le cas simple où la courbe de la classe n se réduit à n ovales infiniment petits, disons à n points a, b, c....

Ces points donnent lieu à $\frac{1}{2}n(n-1)$ segments terminés ab, ac, bc,..., dont chacun peut être regardé comme une ellipse infiniment aplatie. Pour chacun de ces segments, le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit se compose des deux cercles décrits sur lui comme corde, et capables de cet angle et de son supplément (cercles qui se réduisent à un seul cercle double si l'angle devient droit). Donc le lieu se compose en totalité de $n(n-1)$ cercles, c'est-à-dire qu'il est du $2n(n-1)^{ième}$ degré.

Prenons encore un système composé d'une courbe de la classe n' et de $(n-n')$ points, système qui représente une courbe de la classe n. On trouvera encore aisément pour le degré du lieu le nombre $2n(n-1)$, si l'on se rappelle que la courbe, lieu des pieds des obliques abaissées dans un même sens de rotation sur les tangentes d'une conique, est une courbe du quatrième ordre, du genre des *lemniscates* (Chasles, *Comptes rendus*, t. XXXVII, séance du 19 septembre 1853).

Par exemple, si l'on a une conique et deux points, auquel cas $n=4$, on a : 1° une courbe du quatrième ordre comme lieu du sommet de l'angle circonscrit à la conique ; 2° deux cercles, relatifs aux deux points ; 3° deux lemniscates, relatives à la conique et à l'un des points (à cause qu'il faut considérer ici l'angle et son supplément) ; 4° enfin, deux lemniscates relatives à la conique et à l'autre point ; donc le lieu est en totalité du degré

$$4+4+8+8=2\cdot4(4-1)=24.$$