NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre (voir t. XVIII, p. 420)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 177-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__177_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XVIII, p. 420);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Cônes et cylindres du second degré passant par deux coniques situées sur une surface du second degré.*

67. La question que nous allons résoudre nous donnera une idée de l'usage qu'on peut faire des résultats précédents dans la discussion des problèmes.

Soient

$$(1)\qquad (\varphi)\quad \left\{\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ & + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ & + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{aligned}\right\} = 0$$

l'équation d'une surface du second degré, et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0, \\ \mathrm{N} &= n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0, \end{aligned}\right.$$

les équations de deux plans.

Les équations de deux coniques situées sur la surface (1) seront

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ M = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ N = 0, \end{cases}$$

et l'équation générale des surfaces du second ordre passant par les deux coniques (φ, M) et (φ, N), sera

$$(3) \qquad \varphi + 2\lambda MN = 0.$$

On exprimera que cette surface est un cône, en écrivant que le discriminant de l'équation (3) est nul, ce qui permettra de déterminer la constante λ. L'équation en λ est en apparence du quatrième degré; nous allons d'abord constater qu'elle se réduit au second degré.

68. Si l'on désigne par D le discriminant de l'équation (3), et qu'on pose

$$(4) \qquad M_{rs} = m_r n_s + m_s n_r,$$

d'où

$$M_{rs} = M_{sr},$$

l'équation en λ sera

$$(5)\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{12} + \lambda M_{12} & a_{13} + \lambda M_{13} & a_{14} + \lambda M_{14} \\ a_{21} + \lambda M_{21} & a_{22} + \lambda M_{22} & a_{23} + \lambda M_{23} & a_{24} + \lambda M_{24} \\ a_{31} + \lambda M_{31} & a_{32} + \lambda M_{32} & a_{33} + \lambda M_{33} & a_{34} + \lambda M_{34} \\ a_{41} + \lambda M_{41} & a_{42} + \lambda M_{42} & a_{43} + \lambda M_{43} & a_{44} + \lambda M_{44} \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant par colonnes, après avoir posé :

$$(6)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}$$

Désignons

Par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ce que devient le déterminant Δ

lorsqu'on y remplace la 1re, 2e, 3e, 4e colonne respectivement par la 1re, 2e, 3e, 4e colonne du déterminant Δ';

Par Δ_{rs}, ce que devient le déterminant Δ lorsqu'on y remplace à la fois la $r^{ième}$ et la $s^{ième}$ colonne par la $r^{ième}$ et la $s^{ième}$ colonne du déterminant Δ';

Par Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4, ce que devient le déterminant Δ' lorsqu'on y remplace la 1re, 2e, 3e, 4e colonne par la 1re, 2e, 3e, 4e colonne du déterminant Δ.

En employant ces notations, nous trouverons pour l'équation en λ :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta'\lambda^4 + (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 + \Delta'_4)\lambda^3 \\ \quad + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34})\lambda^2 \\ + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)\lambda + \Delta \end{array}\right\} = 0.$$

69. Il est facile de démontrer que

$$\Delta' = 0,\quad \Delta'_1 = 0,\quad \Delta'_2 = 0,\quad \Delta'_3 = 0,\quad \Delta'_4 = 0.$$

Il suffit, pour cela, de faire voir que le déterminant Δ' est identiquement nul, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Or

$$\Delta' = \left|\begin{array}{cccc} m_1 n_1 + m_1 n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & m_1 n_4 + m_4 n_1 \\ m_2 n_1 + m_1 n_2 & m_2 n_2 + m_2 n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & m_2 n_4 + m_4 n_2 \\ m_3 n_1 + m_1 n_3 & m_3 n_2 + m_2 n_3 & m_3 n_3 + m_3 n_3 & m_3 n_4 + m_4 n_3 \\ m_4 n_1 + m_1 n_4 & m_4 n_2 + m_2 n_4 & m_4 n_3 + m_3 n_4 & m_4 n_4 + m_4 n_4 \end{array}\right|$$

De la première colonne, multipliée par n_2, retranchons la seconde multipliée par n_1, il vient :

$$\Delta' = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_2} \left|\begin{array}{cccc} n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & m_1 n_4 + m_4 n_1 \\ n_2 & m_2 n_2 + m_2 n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & m_2 n_4 + m_4 n_2 \\ n_3 & m_3 n_2 + m_2 n_3 & m_3 n_3 + m_3 n_3 & m_3 n_4 + m_4 n_3 \\ n_4 & m_4 n_2 + m_2 n_4 & m_4 n_3 + m_3 n_4 & m_4 u_4 + m_4 n_4 \end{array}\right|$$

De la seconde colonne de ce dernier déterminant, multipliée par n_3, retranchons la troisième multipliée par n_2, nous obtenons :

$$\Delta' = \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)(m_2 n_3 - m_3 n_2)}{n_2 n_3} \begin{vmatrix} n_1 & n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & m_1 n_4 + m_4 n_1 \\ n_2 & n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & m_2 n_4 + m_4 n_2 \\ n_3 & n_3 & m_3 n_3 + m_3 n_3 & m_3 n_4 + m_4 n_2 \\ n_4 & n_4 & m_4 n_3 + m_3 n_4 & m_4 n_4 + m_4 n_4 \end{vmatrix}$$

Or le dernier facteur est nul, car c'est un déterminant dont deux colonnes sont identiques ; donc

$$\Delta' = 0.$$

On s'assurera, par un calcul semblable, que les dérivées partielles du déterminant Δ' sont aussi nulles ; d'où l'on conclura

$$\Delta'_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Ainsi l'équation (7) se réduit à

$$\left\{ \begin{aligned} &(\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34})\lambda^2 \\ &\qquad + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)\lambda + \Delta = 0. \end{aligned} \right.$$

Donc il existe, au plus, deux cônes du second degré passant par les deux coniques (φ, M), (φ, N).

70. Posons maintenant :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\
S &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\
U &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\
V &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifiera sans difficulté les relations suivantes :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_{rs} &= (n_r m_s - n_s m_r) \frac{d^2 V}{dm_r dn_s}, \\
\Delta_r &= -\left(n_r \frac{dT}{dm_r} + m_r \frac{dS}{dn_r} \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Or

$$U = m_1 \frac{dS}{dn_1} + m_2 \frac{dS}{dn_2} + m_3 \frac{dS}{dn_3} + m_4 \frac{dS}{dn_4}$$
$$= n_1 \frac{dT}{dm_1} + n_2 \frac{dT}{dm_2} + n_3 \frac{dT}{dm_3} + n_4 \frac{dT}{dm_4}.$$

Cette relation, jointe au second groupe des identités (10), nous donnera immédiatement

$$(11) \qquad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = -2U.$$

Si l'on a égard à la relation

$$\frac{d^2V}{dm_r\,dn_s} = -\frac{d^2V}{dm_s\,dn_r},$$

le premier groupe des identités (10) donnera

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34} = \left\{ \begin{aligned} &-m_1\left(n_2 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_2} + n_3 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_3} + n_4 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_4}\right),\\ &-m_2\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_1} + n_3 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_3} + n_4 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_4}\right),\\ &-m_3\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_1} + n_2 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_2} + n_4 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_4}\right),\\ &-m_4\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_1} + n_2 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_2} + n_3 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_3}\right). \end{aligned} \right.$$

ou enfin

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34}\\ &= -\left(m_1 \frac{dV}{dm_1} + m_2 \frac{dV}{dm_2} + m_3 \frac{dV}{dm_3} + m_4 \frac{dV}{dm_4}\right) = -V. \end{aligned} \right.$$

L'équation (8) prendra donc la forme définitive

$$(I) \qquad V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0.$$

71. Nous allons maintenant discuter cette équation.

La condition de réalité des racines est donnée par l'inégalité :

(13) $$U^2 + V\Delta > 0.$$

Or, si dans le déterminant V on applique aux quatre éléments $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, que je remplacerai, pour un instant, par $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$, la formule

$$V \frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{dV}{d\alpha}\frac{dV}{d\gamma} - \left(\frac{dV}{d\beta}\right)^2,$$

on obtient la relation

(14) $$V\Delta + U^2 = TS.$$

Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Suivant que le produit des deux déterminants T *et* S *est positif, nul ou négatif, les deux cônes, passant par les coniques* (φ, M), (φ, N), *sont réels, se confondent ou sont imaginaires.*

On voit par la relation (14), que les deux cônes ne se confondront que dans le cas où l'un ou l'autre des déterminants T, S, sera nul ; c'est-à-dire que l'une des coniques se réduira à un point ou à deux droites (56.)

72. Le problème admettra toujours *deux solutions réelles*, lorsque les déterminants Δ et V seront tous deux de même signe, ou lorsque l'un ou l'autre de ces deux déterminants sera nul.

Parcourons ces différentes hypothèses :

1°. ($\Delta > 0$, $V > 0$) ; la droite I, intersection des deux plans $M = 0$, $N = 0$, ne rencontre pas la surface $\varphi = 0$ sur laquelle sont les deux coniques, et cette surface $\varphi = 0$ est, dans le cas actuel, une surface réglée gauche, c'est-à-dire un hyberboloïde à une nappe, ou un paraboloïde hyperbolique, ou un ellipsoïde imaginaire (n° 23 et 36).

2°. ($\Delta < 0$, $V < 0$); la droite I rencontre la surface φ, laquelle est, dans ce cas, un ellipsoïde réel, ou un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique (nos 21 et 36).

3°. ($\Delta = 0$); la surface φ est un cône et les valeurs de λ sont alors 0 et $-\frac{2U}{V}$. Ainsi, lorsque deux coniques sont placées sur un cône du second degré, on peut toujours faire passer par ces coniques un cône différent du premier et un seul.

4°. ($V = 0$); la droite I est tangente à la surface φ, et les deux coniques sont elles-mêmes tangentes à la droite I. Les valeurs de λ sont alors ∞ et $\frac{\Delta}{2U}$; l'un des deux cônes se réduit aux deux plans M et N.

Lorsque le problème n'admet qu'une *seule solution* il faut d'abord que Δ et V soient de signes contraires, et, en outre, que l'un ou l'autre des déterminants T et S soit nul; nous supposerons, par exemple, $T = 0$.

1°. ($\Delta < 0$, $V > 0$); la surface φ est dénuée de génératrices rectilignes et n'est pas rencontrée par la droite I; de plus, le plan M est tangent à la surface φ, qu'il coupe suivant un point; ce point est le sommet du cône unique.

2°. ($\Delta > 0$, $V < 0$); la surface φ est réglée et gauche, et est rencontrée par la droite I; de plus, le plan M est tangent à la surface φ, et il la coupe suivant deux droites; ces deux droites sont situées sur le cône unique qui a pour sommet le point de contact.

Je n'insisterai pas d'avantage sur cette discussion.

73. Cherchons maintenant les relations qui doivent exister entre les quantités a_{rs}, m_t, n_t, pour qu'on puisse faire passer un cylindre du second degré par les deux coniques (φ, M) et (φ, N).

Il faut d'abord que le discriminant de l'équation (3) soit nul ; ce qui laisse subsister les calculs précédents, et conduit, par suite, à l'équation (I) (n° 70).

Il faut, en second lieu (35), remplir la condition suivante :

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda M_{11} & a_{12}+\lambda M_{12} & a_{13}+\lambda M_{13} \\ a_{21}+\lambda M_{21} & a_{22}+\lambda M_{22} & a_{23}+\lambda M_{23} \\ a_{31}+\lambda M_{31} & a_{32}+\lambda M_{32} & a_{33}+\lambda M_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation en λ, qui est en apparence du troisième degré, se réduit au second, parce que le coefficient de λ^3 est une des dérivées partielles du déterminant Δ'. La comparaison de cette dernière équation (15) avec l'équation (5), que nous avons développée ci-dessus, nous conduit sans nouveaux calculs à la relation

$$\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0.$$

Ainsi, *pour que la surface*

$$\varphi + 2\lambda MN = 0,$$

passant par les deux coniques (φ, M) *et* (φ, N), *soit un cylindre elliptique ou hyperbolique, il faut que le paramètre indéterminé* λ *vérifie les deux équations*

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0, \\ &\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Lorsque les équations (II) ont deux solutions communes, ce qui entraîne les deux équations de condition

$$(16) \qquad \frac{\dfrac{dV}{da_{44}}}{V} = \frac{\dfrac{dU}{da_{44}}}{U} = \frac{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}}{\Delta},$$

il existe deux cylindres passant par les deux coniques données.

Lorsque les équations (II) ont une seule racine commune, ce qui entraîne la condition

$$(17) \quad \left(\Delta \frac{dV}{da_{44}} - V\frac{d\Delta}{da_{44}}\right)^2 = 4\left(V\frac{dU}{da_{44}} - U\frac{dV}{da_{44}}\right)\left(\Delta\frac{dU}{da_{44}} - U\frac{d\Delta}{da_{44}}\right),$$

qu'on peut écrire

$$\Delta^2 \left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{V}{\Delta}\right)\right]^2 = 4V^2 \left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{U}{V}\right)\right]\left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{U}{\Delta}\right)\right],$$

on obtient un cône et un seul cylindre passant par les deux coniques données.

En suivant la marche qui a été adoptée dans la discussion précédente, on pourra, sans difficulté, assigner toutes les particularités que présente la question actuelle.

74. Cherchons enfin les conditions pour qu'on puisse faire passer un *cylindre parabolique* par les deux coniques (φ, M) et (φ, N).

Il faut, dans ce cas, satisfaire à trois conditions (35).

La première est exprimée, par la relation (15); elle conduit à l'équation

$$\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0.$$

Les deux autres conditions sont :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{12} + \lambda M_{12} \\ a_{21} + \lambda M_{21} & a_{22} + \lambda M_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{13} + \lambda M_{13} \\ a_{31} + \lambda M_{31} & a_{33} + \lambda M_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ces deux conditions, on sera amené à la conclusion suivante :

Pour que la surface

$$\varphi + 2\lambda MN = 0,$$

passant par les deux coniques (φ, M) *et* (φ, N) *soit un cylindre parabolique, il faut que le paramètre indéterminé* λ *vérifie les trois équations*

$$(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ &\frac{d^2V}{da_{44}\,da_{33}}\lambda^2 + 2\frac{d^2U}{da_{44}\,da_{33}}\lambda - \frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{33}} = 0, \\ &\frac{d^2V}{da_{44}\,da_{22}}\lambda^2 + 2\frac{d^2U}{da_{44}\,da_{22}}\lambda - \frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{22}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations entraînent comme conséquence l'équation (I). Suivant que ces trois équations auront une ou deux racines communes, on pourra faire passer par les deux coniques un ou deux cylindres paraboliques.

75. On pourrait déduire des résultats que nous venons d'obtenir les équations d'un cône ou d'un cylindre circonscrits à une surface du second ordre; mais nous arriverons à des formes d'équation plus remarquables en abordant ce problème d'une autre manière.

Je me contenterai, pour terminer la question objet de ce paragraphe, de donner les coordonnées du sommet du cône et la direction des génératrices du cylindre.

Si l'on a égard aux remarques faites dans les numéros 60 et 62, on aura :

1°. Pour les coordonnées $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ du sommet du cône passant par les coniques (φ, M) et (φ, N) :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{dV}{da_{14}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{14}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{14}}, \\ \alpha_2 &= \frac{dV}{da_{24}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{24}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{24}}, \\ \alpha_3 &= \frac{dV}{da_{34}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{34}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{34}}, \\ \alpha_4 &= \frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}}, \end{aligned}\right.$$

en y joignant l'équation

$$V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0.$$

2°. Pour la direction $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, des génératrices du cylindre passant par les coniques (φ, M) et (φ, N) :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{dV}{da_{13}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{13}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{13}}, \\ \alpha_2 &= \frac{dV}{da_{23}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{23}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{23}}, \\ \alpha_3 &= \frac{dV}{da_{33}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{33}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{33}}, \end{aligned}\right.$$

en y joignant les équations relatives au cylindre :

$$\left\{\begin{aligned} V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0, \\ \frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quantités α_1, α_2, α_3, sont proportionnelles aux cosinus des angles que la direction des génératrices fait avec les axes x_1, x_2, x_3, si ces axes sont rectangulaires.

Dans plusieurs classes de problèmes, ces dernières formules pourront être d'une grande utilité.

§ III. — *Équations générales des cônes et cylindres circonscrits à une surface du second ordre.*

76. Cherchons, en premier lieu, l'équation d'un cône circonscrit à une surface du second degré, et ayant pour sommet un point donné $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$.

Si l'on exprime que la droite

$$(1)\qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

passe par le point fixe $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, et qu'elle est, en outre, tangente à la surface du second degré, on aura les relations :

$$(2)\qquad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + m_4 \alpha_4 = 0, \\ n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 + n_4 \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

$$(3)\qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendra, par conséquent, l'équation cherchée de la surface conique en éliminant m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4, entre les cinq équations (1), (2) et (3).

77. Pour effectuer cette élimination, j'introduirai les notations suivantes. Je désignerai par φ le premier membre de l'équation de la surface du second degré; par X_1, X_2, X_3, X_4, les demi-dérivées $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_3}$,

$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_4}$; puis, par φ_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ces mêmes expressions dans lesquelles on aura remplacé x_1, x_2, x_3, x_4, respectivement par α_1, α_2, α_3, α_4. Nous aurons, d'après cela,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} X_r &= a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + a_{r3}\,x_3 + a_{r4}\,x_4 \\ &= a_{1r}\,x_1 + a_{2r}\,x_2 + a_{3r}\,x_3 + a_{4r}\,x_4, \\ A_r &= a_{r1}\,\alpha_1 + a_{r2}\,\alpha_2 + a_{r3}\,\alpha_3 + a_{r4}\,\alpha_4 \\ &= a_{1r}\,\alpha_1 + a_{2r}\,\alpha_2 + a_{3r}\,\alpha_3 + a_{4r}\,\alpha_4, \\ &\text{où}\quad r = 1, 2, 3, 4; \end{aligned}\right.$$

puis, d'après le principe des fonctions homogènes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4, \\ \varphi_0 &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4. \end{aligned}\right.$$

78. En représentant, pour un instant, par $\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \beta & \gamma\end{matrix}$ le carré $\begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}$ du déterminant V, nous aurons les equations :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a_{11}\frac{dV}{dn_1} + a_{21}\frac{dV}{dn_2} + a_{31}\frac{dV}{dn_3} + a_{41}\frac{dV}{dn_4} + m_1\frac{dV}{d\beta} + n_1\frac{dV}{d\gamma} &= 0, \\ a_{12}\frac{dV}{dn_1} + a_{22}\frac{dV}{dn_2} + a_{32}\frac{dV}{dn_3} + a_{42}\frac{dV}{dn_4} + m_2\frac{dV}{d\beta} + n_2\frac{dV}{d\gamma} &= 0, \\ a_{13}\frac{dV}{dn_1} + a_{23}\frac{dV}{dn_2} + a_{33}\frac{dV}{dn_3} + a_{43}\frac{dV}{dn_4} + m_3\frac{dV}{d\beta} + n_3\frac{dV}{d\gamma} &= 0, \\ a_{14}\frac{dV}{dn_1} + a_{24}\frac{dV}{dn_2} + a_{34}\frac{dV}{dn_3} + a_{44}\frac{dV}{dn_4} + m_4\frac{dV}{d\beta} + n_4\frac{dV}{d\gamma} &= 0, \\ m_1\frac{dV}{dn_1} + m_2\frac{dV}{dn_2} + m_3\frac{dV}{dn_3} + m_4\frac{dV}{dn_4} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad &= 0, \\ n_1\frac{dV}{dn_1} + n_2\frac{dV}{dn_2} + n_3\frac{dV}{dn_3} + n_4\frac{dV}{dn_4} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad &= V = 0; \end{aligned}\right.$$

ces relations résultent de la propriété fondamentale des déterminants.

Si l'on multiplie les quatre premières de ces équations respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4, puis qu'on ajoute les résultats, en ayant égard aux identités (1) et (4), il viendra

$$X_1 \frac{dV}{dn_1} + X_2 \frac{dV}{dn_2} + X_3 \frac{dV}{dn_3} + X_4 \frac{dV}{dn_4} = 0.$$

On obtiendra de même, en multipliant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, et en ayant égard aux relations (2) et (4),

$$A_1 \frac{dV}{dn_1} + A_2 \frac{dV}{dn_2} + A_3 \frac{dV}{dn_3} + A_4 \frac{dV}{dn_4} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dV}{dn_1}, \frac{dV}{dn_2}, \frac{dV}{dn_3}, \frac{dV}{dn_4}$, entre les deux dernières équations du groupe (6) et les deux qu'on vient de déduire, conduit immédiatement à la relation

$$(7) \qquad V_1 = \begin{vmatrix} X_1 & A_1 & m_1 & n_1 \\ X_2 & A_2 & m_2 & n_2 \\ X_3 & A_3 & m_3 & n_3 \\ X_4 & A_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation fournira les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & X_1 \frac{dV_1}{dX_1} + A_1 \frac{dV_1}{dA_1} + m_1 \frac{dV_1}{dm_1} + n_1 \frac{dV_1}{dn_1} = V_1 = 0, \\ & X_2 \frac{dV_1}{dX_1} + A_2 \frac{dV_1}{dA_1} + m_2 \frac{dV_1}{dm_1} + n_2 \frac{dV_1}{dn_1} = 0, \\ & X_3 \frac{dV_1}{dX_1} + A_3 \frac{dV_1}{dA_1} + m_3 \frac{dV_1}{dm_1} + n_3 \frac{dV_1}{dn_1} = 0, \\ & X_4 \frac{dV_1}{dX_1} + A_4 \frac{dV_1}{dA_1} + m_4 \frac{dV_1}{dm_1} + n_4 \frac{dV_1}{dn_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant ces quatre relations multipliées d'abord par x_1, x_2, x_3, x_4, puis par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, on trouvera successivement

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi \frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{X}_1} + (x_1 \mathrm{A}_1 + x_2 \mathrm{A}_2 + x_3 \mathrm{A}_3 + x_4 \mathrm{A}_4) \frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{A}_1} = 0,\\ &(\alpha_1 \mathrm{X}_1 + \alpha_2 \mathrm{X}_2 + \alpha_3 \mathrm{X}_3 + \alpha_4 \mathrm{X}_4) \frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{X}_1} + \varphi_0 \frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{A}_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{X}_1}, \frac{d\mathrm{V}_1}{d\mathrm{A}_1}$, entre ces deux dernières équations conduira précisément à l'équation cherchée.

On a ainsi pour l'équation générale des cônes circonscrits à une surface du second ordre :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi\varphi_0 - (x_1 \mathrm{A}_1 + x_2 \mathrm{A}_2 + x_3 \mathrm{A}_3 + x_4 \mathrm{A}_4)\\ &\qquad \times (\alpha_1 \mathrm{X}_1 + \alpha_2 \mathrm{X}_2 + \alpha_3 \mathrm{X}_3 + \alpha_4 \mathrm{X}_4) = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de vérifier que les deux derniers facteurs sont identiquement égaux.

79. On peut donner une forme très-remarquable à cette dernière équation.

Désignant toujours par Δ le discriminant de la fonction φ, posons

$$(9)\qquad \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}}.$$

On sait que si l'on représente par S le déterminant dont les éléments sont α_{rs}, on a les deux identités

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S} = \Delta^3,\\ &\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha_{rs}} = \Delta^2 a_{rs}. \end{aligned}\right.$$

(Brioschi, *Théorie des déterminants*, p. 41).

Ceci admis, considérons le déterminant

$$(11)\qquad C = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 & \alpha_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 & \alpha_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 & \alpha_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On aura, d'après une formule fréquemment employée,

$$(12)\qquad C\frac{d^2C}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{dC}{d\alpha}\frac{dC}{d\gamma} - \left(\frac{dC}{d\beta}\right)^2,$$

en représentant le carré $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ par $\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{matrix}$.

Or, si l'on a égard aux identités (10), on vérifiera immédiatement les relations suivantes :

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2C}{d\alpha\, d\gamma} &= S = \Delta^3, \\ \frac{dC}{d\gamma} &= -\Delta^2\varphi, \\ \frac{dC}{d\alpha} &= -\Delta^2\varphi_0, \\ \frac{dC}{d\beta} &= -\Delta^2(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_2 + \alpha_4 X_4) \\ &= -\Delta^2(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4). \end{aligned} \right.$$

L'identité (10) donne alors

$$(14)\qquad C = \Delta\left[\begin{aligned} \varphi\varphi_0 - (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4) \\ \times (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4) \end{aligned}\right].$$

Du rapprochement des relations (8), (11) et (14), nous conclurons que l'équation d'un cône ayant pour sommet

$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, et circonscrit à une surface du second degré qui a pour discriminant Δ, peut se mettre sous la forme simple et mnémonique :

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{11}} & \frac{d\Delta}{da_{12}} & \frac{d\Delta}{da_{13}} & \frac{d\Delta}{da_{14}} & x_1 & \alpha_1 \\ \frac{d\Delta}{da_{21}} & \frac{d\Delta}{da_{22}} & \frac{d\Delta}{da_{23}} & \frac{d\Delta}{da_{24}} & x_2 & \alpha_2 \\ \frac{d\Delta}{da_{31}} & \frac{d\Delta}{da_{32}} & \frac{d\Delta}{da_{33}} & \frac{d\Delta}{da_{34}} & x_3 & \alpha_3 \\ \frac{d\Delta}{da_{41}} & \frac{d\Delta}{da_{42}} & \frac{d\Delta}{da_{43}} & \frac{d\Delta}{da_{44}} & x_4 & \alpha_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

80. Cherchons maintenant l'équation d'un cylindre circonscrit à la surface $\varphi = 0$.

Il faut d'abord exprimer que la droite quelconque

$$(16) \qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

est parallèle à une droite fixe donnée

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne les relations

$$(18) \qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

λ étant une constante indéterminée.

Il faut, en second lieu, exprimer que la droite (16) est tangente à la surface φ, ce qui donne (36)

$$(19)\qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation du cylindre circonscrit en éliminant les m_i, n_i entre les équations (16), (18) et (19).

81. Pour effectuer cette élimination, il est nécessaire de transformer le déterminant V. Multiplions les trois premières lignes par x_1, x_2, x_3, et ajoutons les résultats ainsi obtenus à la quatrième, multipliée elle-même par x_4, il viendra, en ayant égard aux relations (4) et (16) :

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions maintenant les trois premières colonnes de ce dernier déterminant par x_1, x_2, x_3, et ajoutons les résultats à la quatrième, multipliée elle-même par x_4, nous obtiendrons l'équation :

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & m_3 & n_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \varphi & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or remarquons que si l'on développait ce déterminant, les m_i, n_i, n'y entreraient que sous les formes $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}$; et, de plus, le résultat serait homogène par rapport à ces binômes.

Il en résulte, si l'on fait attention aux relations (18), que l'élimination s'effectuera par la simple substitution, dans l'équation (21), des α_i aux m_i, et des β_i aux n_i.

On trouve ainsi, pour l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite (17), et qui est circonscrit à la surface du second ordre $\varphi = 0$,

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \varphi & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut encore donner à ce dernier déterminant une forme beaucoup plus simple. Retranchons de la quatrième colonne les trois premières respectivement multipliées par x_1, x_2, x_3; puis opérons de la même manière sur les lignes du déterminant ainsi obtenu, en ayant toujours égard aux identités (4) et (5), on arrive à la forme définitive pour l'équation du cylindre circonscrit :

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \alpha_2 & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \alpha_3 & \beta_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & A & B \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & A & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & B & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités A et B sont définies par les équations suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} A = -\left(\alpha_1 \dfrac{x_1}{x_4} + \alpha_2 \dfrac{x_2}{x_4} + \alpha_3 \dfrac{x_3}{x_4}\right), \\ B = -\left(\beta_1 \dfrac{x_1}{x_4} + \beta_2 \dfrac{x_2}{x_4} + \beta_3 \dfrac{x_3}{x_4}\right); \end{cases}$$

ce sont les premiers membres, changés de signe, des équations d'une droite passant par l'origine et parallèle à la direction donnée des génératrices du cylindre.