NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACHETTE

Note sur certains développements et solution des questions 461, 468 et 479

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 155-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__155_0>

NOTE SUR CERTAINS DÉVELOPPEMENTS ET SOLUTION DES QUESTIONS 461, 468 ET 479;

PAR M. A. VACHETTE,
Professeur de Mathématiques.

I. *Valeur de* $a_m = x^m + \frac{1}{x^m}$ *en fonction de* $a = x + \frac{1}{x}$ *et de* m.

L'abaissement des équations réciproques de degré pair donne lieu à une équation de degré sous-double en posant $x + \frac{1}{x} = a$, et remplaçant $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}, \ldots, x^m + \frac{1}{x^m}$ par les valeurs qui en résultent. On a la relation générale

$$(1)\ x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

ou

$$a_m = a_{m-1}\, a - a_{m-2}.$$

Je calcule directement plusieurs termes, en commençant par $a_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2.\\
a_1 &= a.\\
a_2 &= a^2 - 2.\\
a_3 &= a^3 - 3a.\\
a_4 &= a^4 - 4a^2 + 2.\\
a_5 &= a^5 - 5a^3 + 5a.\\
a_6 &= a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2.\\
a_7 &= a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.\\
a_8 &= a^8 - 8a^6 + 20a^4 - 16a^2 + 2.\\
a_9 &= a^9 - 9a^7 + 27a^5 - 30a^3 + 9a.\\
a_{10} &= a^{10} - 10a^8 + 35a^6 - 50a^4 + 25a^2 - 2.\\
a_{11} &= a^{11} - 11a^9 + 44a^7 - 77a^5 + 55a^3 - 11a.
\end{aligned}$$

. . . .

Pour un indice pair, si $m = 4p$, le dernier terme est $+ 2$; et si $m = 4p + 2$, le dernier terme est $- 2$. Pour un indice impair, si $m = 4p + 1$, le dernier terme est $+ ma$; et si $m = 4p + 3$, le dernier terme est $- ma$. Le nombre des termes augmente d'une unité, d'un indice pair à l'indice pair suivant, et surpasse d'une unité la moitié de l'indice. Pour un indice pair, le développement ne contient que les puissances paires de a ; et pour un indice impair, il ne contient que les puissances impaires. La valeur absolue d'un terme de a_m est la somme des valeurs absolues du terme de a_{m-1} situé dans la même colonne verticale, et du terme de a_{m-2} situé dans la colonne à gauche. Les termes ont alternativement le signe $+$ et le signe $-$.

Soit $\mathrm{T}_{\frac{m}{k}}$ la valeur absolue du coefficient d'un terme de a_m qui en a k avant lui, on aura

$$a_m = a^m - \mathrm{T}_{\frac{m}{1}} a^{m-2} + \mathrm{T}_{\frac{m}{2}} a^{m-4} - \mathrm{T}_{\frac{m}{3}} a^{m-6} + \dots$$
$$\pm \mathrm{T}_{\frac{m}{k-1}} a^{m-2k-2} \mp \mathrm{T}_{\frac{m}{k}} a^{m-2k} + \dots .$$

Le premier terme d'une série verticale est toujours 2, et s'il en a k avant lui, l'indice de la ligne horizontale est $2k$; on aura donc toujours $\mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} = 2$.

Supposons un indice $m > 2k$, la loi de formation d'un terme donne

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{T}_{\frac{m}{k}} = \mathrm{T}_{\frac{m-1}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{m-2}{k-1}} \\
\mathrm{T}_{\frac{m-1}{k}} = \mathrm{T}_{\frac{m-2}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{m-3}{k-1}} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathrm{T}_{\frac{2k+1}{k}} = \mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{2k-1}{k-1}} \\
\mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} = 2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{T}_{\frac{2k-2}{k-1}}
\end{array}\right.$$

et en ajoutant

$$(3)\quad T_{\frac{m}{k}} = T_{\frac{m-2}{k-1}} + T_{\frac{m-3}{k-1}} + \ldots + T_{\frac{2k-1}{k-1}} + T_{\frac{2k-2}{k-1}}$$

$$= \sum_{2k-2}^{m-2} T_{\frac{p}{k-1}}$$

la somme $\sum$ s'étendant depuis $p = m - 2$ jusqu'à $p = 2k - 2$.

On a

$$T_{\frac{m}{0}} = 1$$

excepté pour $T_{\frac{0}{0}} = 2$.

Pour $T_{\frac{m}{1}}$, la formule (2) donne

$$T_{\frac{m}{1}} = T_{\frac{m-1}{1}} + T_{\frac{m-2}{0}} = T_{\frac{m-1}{1}} + 1\,;$$

il faut toujours augmenter d'une unité le terme précédent de la même colonne. A partir de $m = 3$, $T_{\frac{3}{1}} = 3$; on aura donc

$$T_{\frac{m}{1}} = m.$$

Pour $T_{\frac{m}{2}}$, la formule (3) donne

$$T_{\frac{m}{2}} = \sum_{2}^{m-2} T_{\frac{p}{1}} = 2 + 3 + \ldots + (m-2) = \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2}$$

Pour $T_{\frac{m}{3}}$, on aura

$$T_{\frac{m}{3}} = \sum_{4}^{m-2} T_{\frac{p}{2}} = \sum_{4}^{m-2} \frac{p(p-3)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m-2)(m-5)+(m-3)(m-6)+\ldots+5.2+4.1\right],$$

$$2\,T_{\frac{m}{3}} = 1(1+3)+2(2+3)+\ldots+(m-5)(m-5+3)$$

$$= 1^2+2^2+\ldots+(m-5)^2+3[1+2+3+\ldots+(m-5)];$$

or

$$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et pour $n = m-5$

$$S_2 = \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6},$$

par suite

$$2\,T_{\frac{m}{3}} = \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6} + \frac{3(m-5)(m-4)}{2}$$

$$= \frac{2m(m-4)(m-5)}{6},$$

$$T_{\frac{m}{3}} = \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}.$$

On peut dès lors soupçonner que

$$T_{\frac{m}{k}} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

qui se réduit à 2 pour $m=2k$, et à m pour $m=2k+1$.

Pour justifier cette forme du terme général de a_m, on la suppose applicable aux développements $a_1\,a_2\ldots a_{m-1}$;

si on peut l'appliquer à a_m, étant vérifiée jusqu'à a_6 elle sera générale. Or d'après (2)

$$T_{\frac{m}{k}} = \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{1.2.3.\ldots k}$$

$$+\frac{(m-2)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3.\ldots(k-1)}$$

$$=\frac{(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

$$\times\left[\frac{(m-1)(m-2k)}{k}+m-2\right]$$

$$=\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3.\ldots k}$$

et la formule (1) devient

$$(4)\quad a_m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}a^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}a^{m-6} + \ldots$$

$$\pm\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}a^{m-2k} \mp \ldots$$

le terme général ayant le signe + ou le signe —, selon que k est pair ou impair.

II. *Trouver deux nombres dont on a la somme* a *et la somme des* m^iemes^ *puissances* a_m.

On a, x et y étant ces deux nombres l'identité

$$x^m + y^m = (x^{m-1} + y^{m-1})(x+y) - xy(x^{m-2} + y^{m-2}),$$

que nous pouvons écrire au moyen des indices et de $p = xy$,

$$(5)\qquad a_m = a_{m-1}a - pa_{m-2}$$

avec $a_1 = a$ et $a_0 = 2$. Cette formule ne diffère de la formule (1) du paragraphe précédent qu'en ce que le terme négatif est multiplié par p

Le calcul direct donne une analogie parfaite

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2,\\
a_1 &= a,\\
a_2 &= a^2 - 2p,\\
a_3 &= a^3 - 3pa,\\
a_4 &= a^4 - 4pa^2 + 2p^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

les coefficients numériques suivent évidemment la même loi de formation, et

$$\mathrm{T}_{\overline{\overset{m}{k}}} = \mathrm{T}_{\overline{\overset{m-1}{k}}} + \mathrm{T}_{\overline{\overset{m-2}{k-1}}},$$

coefficients de p^k et p^{k-1} dans a_{m-1} et a_{m-2}, sera coefficient de p^k dans a_m d'après la loi (5). On aura donc, les exposants de p allant en augmentant d'une unité à chaque terme depuis p^0 jusqu'au dernier terme où p a un exposant égal à la moitié de m,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
a_m = a^m &- \frac{m}{1} p a^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,2} p^2 a^{m-4}\\
&- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} p^3 a^{m-6} + \ldots\\
&\pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} p^k a^{m-2k} \mp \ldots
\end{aligned}\right.$$

Comme a et a_m sont connus, on aura le produit p par une équation de degré sous-double. Avec la somme a et le produit p des nombres x et y, x et y seront les deux racines de $\zeta^2 - a\zeta + p = 0$.

III. *Conséquences de la formule* (6).

1° Quand m est un nombre premier autre que 2, le nombre $\frac{(x+y)^m-(x^m+y^m)}{mxy(x+y)}$ est un nombre entier, x et y étant entiers. Comme m est un nombre premier autre que 2, il est impair et le dernier terme du développement (6) est $\pm mp^{\frac{m-1}{2}}a$.

On déduit de la formule (6)

$$\frac{a^m - a_m}{ap}$$
$$= ma^{m-3} - \frac{m(m-3)}{1.2}pa^{m-5} + \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}p^2a^{m-7} - \ldots$$
$$\pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}p^{k-1}a^{m-2k-1} \mp \ldots$$
$$\pm mp^{\frac{m-3}{2}}.$$

Chaque coefficient contient m au numérateur, et le dénominateur $1.2.3 \ldots k$ ne le contient pas, puisque m est premier, et que chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, k$ est plus petit que m. Donc $\frac{a^m - a_m}{map}$ est entier, et ce quotient a pour expression

$$a^{m-3} - \frac{m-3}{2}pa^{m-5} + \frac{(m-4)(m-5)}{2.3}p^2a^{m-7} - \ldots$$
$$\pm \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1}{2.3\ldots k}p^{k-1}a^{m-2k-1} \mp \ldots$$
$$\pm p^{\frac{m-3}{2}}.$$

Si m est premier, tous les coefficients sont entiers; celui de $p^{\frac{m-3}{2}}$, qui se réduit à 1, est

$$\frac{\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\left(\frac{m+1}{2}-2\right)\left(\frac{m+1}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{m+1}{2}-\frac{m-1}{2}+1\right)}{2\cdot3\cdot4\cdots\frac{m-1}{2}}.$$

La plus grande valeur du dernier facteur k d'un dénominateur est $\frac{m-1}{2}$.

Si m n'est pas premier, il contiendra certains facteurs premiers, k par exemple; ce facteur k ne peut être égal à $\frac{m-1}{2}$, car

$$m : \frac{m-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$$

devrait être un nombre entier, ce qui nécessite $m - 1 = 2$ ou $m = 3$, nombre premier. Alors le nombre

$$\frac{(m-k-1)\,(m-k-2)\,\ldots\,(m-2k+1)}{2.3\,\ldots\,k}$$

ne peut pas être entier; posons

$$m = (q+1)k,$$

d'où

$$m - k = qk,$$

et le nombre devient

$$\frac{(qk-1)\,(qk-2)\,(qk-3)\,\ldots\,(qk-k+1)}{2.3.4\,\ldots\,k},$$

où k ne divise aucun des nombres $qk-1$, $qk-2$, $qk-3$, ..., $qk-(k-1)$, égaux chacun à une différence entre un multiple de k et un non-multiple de k.

2° Si m est premier, égal à $2n+1$, on peut écrire

$$\frac{(x+y)^{2n+1} - (x^{2n+1} + y^{2n+1})}{x+y}$$

$$= (x+y)^{2n} - (x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n})$$

$$= \left.\begin{array}{r}2n\\+1\end{array}\right| x^{2n-1}y + \left.\begin{array}{r}\dfrac{2n(2n-1}{1.2}\\-1\end{array}\right| x^{2n-2}y^2 + \ldots$$

$$+ \left.\begin{array}{r}\dfrac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots(2p+1)}\\+1\end{array}\right| x^{2n-2p-1}y^{2p+1}$$

$$+ \left.\begin{array}{r}\dfrac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p+1)}{1.2.3\ldots(2p+2)}\\-1\end{array}\right| x^{2n-p-2}y^{2p+2} + \ldots$$

$$+ \left.\begin{array}{r}2n\\+1\end{array}\right| xy^{2n-1}$$

Le deuxième membre, comme on l'a vu plus haut, est divisible par xy et par $2n+1$; comme $2n+1$ est indépendant de x et de y, chaque coefficient est divisible par $2n+1$, et les deux nombres

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots(2p+1)}+1,\quad \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p-1)}{1.2.3\ldots(2p+2)}-1$$

sont divisibles par le nombre premier $2n+1$, p étant plus petit que n.

Ce dernier théorème peut résulter de la généralisation du principe de la preuve par 9 : si les nombres a, a', a'', ..., divisés par d, donnent les restes r, r', r'', ..., la différence $aa'a''\ldots - rr'r''\ldots$ est divisible par d. En effet

$$2n,\quad 2n-1,\quad 2n-2,\quad \ldots,\quad 2n-2p,\quad 2n-2p-1$$

divisés par $2n+1$, donnent les restes

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad \ldots,\quad -(2p+1),\quad -(2p+2).$$

Prenons tous les facteurs, excepté le dernier, le produit des restes correspondants, en nombre impair, a le signe —, et en vertu du lemme

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2p)+1.2.3\ldots(2p+1)$$

est divisible par $2n+1$; divisant cette somme par $1.2.3\ldots(2p+1)$, on n'enlève pas le facteur $2n+1$, qui est premier avec ce produit et il en résulte

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots(2p+1)}+1$$

divisible par $2n+1$.

Si on prend tous les facteurs, le produit a le signe $+$; alors on aura

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2p-1)-1.2.3\ldots(2p+1)(2p+2)$$

divisible par $2n+1$, et il en est de même de

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p-1)}{1.2.3\ldots(2p+2)}-1.$$

Si une seule des divisions précédentes n'a pas lieu, quand p est plus petit que n, $2n+1$ n'est pas un nombre premier; car, premier ou non, il divise toujours

$$2n(2n-1)\ldots(2n-2p)+1.2.3\ldots(2p+1)$$

et

$$2n(2n-1)\ldots(2n-2p-1)-1.2.3\ldots(2p+2);$$

il faut alors que le facteur $2n+1$ ou au moins un de ses diviseurs ait été enlevé dans la division respective de chaque somme par $1.2.3\ldots(2p+1)$ pour la première, et par $1.2.3\ldots(2p+2)$ pour la seconde; donc $2n+1$ admettant un diviseur plus petit que lui, n'est pas un nombre premier.

IV. *Valeur des différences* $A_5 = a^5 - a_5$, $A_7 = a^7 - a_7$ *et conséquences qui en résultent pour* A_{5+6n} *et* A_{7+6n}, *le nombre* n *pouvant être nul.*

On trouve aisément

$$A_5 = a^5 - a_5 = 5a(a^2 - 1),$$
$$A_7 = a^7 - a_7 = 7a(a^2 - 1)^2.$$

Généralement

A_{5+6n} est divisible par $a^2 - 1$,

A_{7+6n} est divisible par $(a^2 - 1)^2$.

Nous commençons par établir une relation entre A_{m+6} et A_m, en nous servant des six relations suivantes, déduites de la formule (1) qu'on ajoute, en les multipliant par les facteurs respectifs placés vis-à-vis, afin d'éliminer plus rapidement :

$$\begin{array}{ll}
a_{m+6} = aa_{m+5} - a_{m+4}, & 1; \\
a_{m+5} = aa_{m+4} - a_{m+3}, & a; \\
a_{m+4} = aa_{m+3} - a_{m+2}, & a^2 - 1; \\
a_{m+3} = aa_{m+2} - a_{m+1}, & a(a^2 - 1) - a = a^3 - 2a; \\
a_{m+2} = aa_{m+1} - a_m, & a(a^3 - 2a) - (a^2 - 1) = a^4 - 3a^2 + 1; \\
a_{m+1} = aa_m - a_{m-1}, & a(a^4 - 3a^2 + 1) - (a^3 - 2a) = a^5 - 4a^3 + 3a.
\end{array}$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{m+6} = (a^6 - 4a^4 + 3a^2 - a^4 + 3a^2 - 1)\,a_m \\
\qquad\qquad - a(a^4 - 4a^2 + 3)\,a_{m-1} \\
\qquad = a^6 a_m - (5a^4 - 6a^2 + 1)\,a_m - a(a^4 - 4a^2 + 3)\,a_{m-1} \\
a_{m+6} = a^6 a_m - (a^2 - 1)\left\{(5a^2 - 1)\,a_m + a(a^2 - 3)\,a_{m-1}\right\}.
\end{array}\right.$$

Retranchant les deux membres de a^{m+6},

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2 - 1)\left[(5a^2 - 1)\,a_m + a(a^2 - 3)\,a_{m-1}\right].$$

Si m est de la forme $6n+5$, la divisibilité par a^2-1 de A_{m+6} est ramenée à celle de A_m ou de A_{m-6} ..., ou enfin de A_5; ainsi A_{5+6n} est divisible par a^2-1.

Quand m est de la forme $6n+7$, la parenthèse

$$\begin{aligned} P_m &= (5a^2-1)\,a_m + a\,(a^2-3)\,a_{m-1} \\ &= (a^2-1)\,(a_m + aa_{m-1}) + 2a\,(2aa_m - a_{m-1}) \end{aligned}$$

est divisible par a^2-1. Il suffit de prouver que la deuxième partie de P_m, que $2aa_m - a_{m-1}$ est divisible par a^2-1. Appliquons la formule (7)

$$\begin{aligned} a_m &= a^6 a_{m-6} - (a^2-1)\,P_{m-6}, \\ a_{m-1} &= a^6 a_{m-7} - (a^2-1)\,P_{m-7}, \end{aligned}$$

et par suite

$$2aa_m - a_{m-1} = a^6(2aa_{m-6} - a_{m-7}) - (a^2-1)\,(2aP_{m-6} - P_{m-7}).$$

La divisibilité par a^2-1 de P_m ou de $2aa_m - a_{m-1}$ est ramenée à celle de $2aa_{m-6} - a_{m-7}$, ou de $2aa_{m-12} - a_{m-13}$, ..., ou enfin de $2aa_7 - a_6$, ou même de

$$2aa_1 - a_0 = 2a^2 - 2 = 2(a^2-1).$$

On peut écrire dans ce cas

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2-1)^2\,Q$$

et la divisibilité de A_{m+6} par $(a^2-1)^2$ est ramenée à celle de A_m ou de A_{m-6}, ..., ou enfin de A_7; ainsi A_{6n+7} sera divisible par $(a^2-1)^2$.

Cette divisibilité a été établie par Cauchy (*voir* le *Journal de Liouville*), sur les remarques qu'avait faites M. Lamé pour A_5 et A_7, mais en s'appuyant sur des considérations toutes différentes.

Si m est de la forme $6n+5$, la divisibilité de A_m par a^2-1 donne $A_m = 0$ pour $a^2 = 1$; il en résulte l'identité suivante, en divisant tous les termes par m, dans la relation (4)

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} o = 1 - \frac{m-3}{2} + \frac{(m-4)(m-5)}{2.3} \\ - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4} \\ + \frac{(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3.4.5} - \ldots + \\ \pm \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} \mp \ldots \end{aligned} \right.$$

le dernier terme étant ± 1. Quand m est premier, chaque terme du second membre est entier. Cette identité (8) existe aussi pour les nombres entiers m de la forme $6n+7$.

Si m est de la forme $6n+7$, on sait que $2aa_m - a_{m-1}$ est divisible par a^2-1; cette expression ne cóntient que des puissances paires de a, et doit devenir nulle pour $a^2=1$. Or on peut écrire

$$\begin{aligned} 2aa_m - a_{m-1} &= 2a^{m+1} - 2a^{m+1} + 2aa_m - a_{m-1} \\ &= 2a^{m+1} - a_{m-1} - 2aA_m. \end{aligned}$$

Comme $A_m = o$ pour $a^2 = 1$, il faut que pour cette hypothèse

$$2a^{m+1} - a_{m-1} = o,$$

ce qui donne, pour cette forme de m, l'identité

$$\begin{aligned} o = 2 - 1 + \frac{m-1}{1} - (m-1)\frac{m-4}{2} + (m-1)\frac{(m-5)(m-6)}{2.3} \\ - (m-1)\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4} + \ldots \\ \pm (m-1)\frac{(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{2.3\ldots k} \mp \ldots, \end{aligned}$$

le dernier terme étant égal à $\pm$ 2. On aura donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = m &- \frac{(m-1)(m-4)}{2} + \frac{(m-1)(m-5)(m-6)}{2.3} \\ &- (m-1)\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4} + \ldots \\ &\pm \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{2.3\ldots k} \mp \ldots \end{aligned}\right.$$

Ces identités (8) et (9) sont exclusives; l'identité (8) ne convient qu'aux nombres entiers des deux formes $6n+5$ et $6n+7$ ou $6n \pm 1$, n prenant toutes les valeurs entières à partir de 1; l'identité (9) ne convient qu'aux nombres entiers de la forme $6n+1$.

V. *Conséquences de la formule* (3) $T_{\frac{m}{k}} = \sum_{2k-2}^{m-2} T_{\frac{p}{k-1}}$.

Si on y remplace m par $m+2$, et k par $k+1$, on aura

$$T_{\frac{m+2}{k+1}} = \sum_{2k}^{m} T_{\frac{p}{k}},$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} \\ &\quad + \frac{(m-1)(m-k-2)\ldots(m-2k)}{1.2\ldots k} \\ &\quad + \frac{(m-2)(m-k-3)\ldots(m-2k-1)}{1.2\ldots k} + \ldots \\ &\quad + \frac{2k(k-1)(k-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots k} \\ &\quad = \frac{(m+2)(m-k)(m-k-1)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots(k+1)}, \end{aligned}$$

et supprimant le dénominateur $1.2.3\ldots k$

$$\begin{aligned}&m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)\\&+(m-1)(m-k-2)\ldots(m-2k)\\&+(m-2)(m-k-3)\ldots(m-2k-1)+\ldots\\&+2k(k-1)(k-2)\ldots1\\&=\frac{1}{k+1}(m+2)(m-k)(m-k-1)\ldots(m-2k+1).\end{aligned}$$

Ce résultat peut s'obtenir directement. Cherchons la somme

$$\begin{aligned}&1.2.3\ldots(k-1).2k+2.3.4\ldots k(2k+1)\\&+3.4.5\ldots(k+1).(2k+2)+\ldots\\&+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1).m.\end{aligned}$$

Je décompose chaque dernier facteur en deux parties, dont la première est k, on aura la somme des deux lignes suivantes

$$\begin{aligned}&1.2.3\ldots(k-1).k+2.3.4\ldots k(k+1)\\&+3.4.5\ldots(k+1)(k+2)+\ldots\\&+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)\\&+k\left\{1.2.3\ldots(k-1)+2.3.4\ldots k+3.4.5\ldots(k+1)+\ldots\right.\\&\left.+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)\right\}.\end{aligned}$$

La première est la somme depuis k jusqu'à $m-k$, des produits de k nombres entiers consécutifs; elle est égale au quotient par $k+1$ du dernier de ces produits multiplié par le nombre entier consécutif de son dernier facteur, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)(m-k+1).$$

On le vérifie pour 2, 3, 4,..., termes, et on démontre la généralité de proche en proche, par la méthode bien connue

$$1.2.3\ldots(k-1)k+2.3.4\ldots k(k+1)=2.3\ldots(k-1)k.(k+2)$$
$$=2.3\ldots(k-1)k(k+1)(k+2)\cdot\frac{1}{k+1};$$

ajoutant le troisième terme

$$2.3\ldots k(k+1)(k+2)\frac{1}{k+1}+3.4\ldots(k+1)(k+2)$$
$$=3.4.5\ldots(k+1)(k+2)\left(\frac{2}{k+1}+1\right)$$
$$=3.4.5\ldots(k+1)(k+2)(k+3)\frac{1}{k+1},$$

et ainsi de suite.

La seconde ligne est le produit par k de la somme depuis $k-1$ jusqu'à $m-k-1$, des produits de $k-1$ nombres entiers consécutifs; elle sera

$$\frac{k}{k}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k).$$

La somme cherchée est donc

$$\frac{1}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)(m-k+1)$$
$$+(m-2k+1)\ldots(m-k-1)(m-k)$$
$$=(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)\left(\frac{m-k+1}{k+1}+1\right)$$
$$=\frac{m+2}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k),$$

ce qu'il fallait vérifier.

Le lemme qui nous a servi à cette vérification donne un théorème sur les arrangements; $A_{\frac{m-k}{k}}$ étant le nombre des arrangements de $m-k$ lettres prises k à k, on aura

$$\mathrm{A}_{\frac{k}{k}}+\mathrm{A}_{\frac{k+1}{k}}+\mathrm{A}_{\frac{k+2}{k}}+\ldots+\mathrm{A}_{\frac{m-k}{k}}=\frac{1}{k+1}\,\mathrm{A}_{\frac{m-k+1}{k+1}},$$

et, si l'on pose $m-k=n$,

$$\mathrm{A}_{\frac{k}{k}}+\mathrm{A}_{\frac{k+1}{k}}+\mathrm{A}_{\frac{k+2}{k}}+\ldots+\mathrm{A}_{\frac{n}{k}}=\frac{1}{k+1}\,\mathrm{A}_{\frac{n+1}{k+1}}.$$

VI. *Question* 461. *Limite de la série*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)}+\ldots.$$

La différence entre le premier et le dernier facteur de chaque dénominateur est $n-1$; si l'on multiplie et divise chaque terme par $n-1$, on aura

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{1.2.3\ldots n}-\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}-\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right),$$

$$\frac{1}{2.3.4\ldots(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n+1}{2.3.4\ldots(n+1)}-\frac{2}{2.3.4\ldots(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2.3.4\ldots n}-\frac{1}{3.4.5\ldots(n+1)}\right),$$

$$\frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n+2}{3.4.5\ldots(n+2)}-\frac{3}{3.4.5\ldots(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{3.4.5\ldots(n+1)}-\frac{1}{4.5.6\ldots(n+2)}\right),$$

. . . .

$$\frac{1}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n+m}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}-\frac{1+m}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m-1)}-\frac{1}{(2+m)\ldots(n+m)}\right);$$

si l'on ajoute

$$S_m=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}-\frac{1}{(2+m)(3+m)\ldots(n+m)}\right),$$

si l'on passe à la limite, pour $m=\infty$,

$$S=\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Avec la notation des arrangements, on a la formule indiquée par M. Vannson :

$$\frac{1}{A_{\frac{n}{n}}}+\frac{1}{A_{\frac{n+1}{n}}}+\frac{1}{A_{\frac{n+2}{n}}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)A_{\frac{n-1}{n-1}}}.$$

VII. *Vérification directe de l'identité binomiale et solution de la question 468.*

Je veux parler de l'identité

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots;$$

la méthode est analogue à celle du § V.

$$1 - \frac{m}{1} = \frac{1-m}{1} = -\frac{m-1}{1},$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m-1}{1} = \frac{m-1}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}.$$

Si S_n est la somme des termes jusques et y compris

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n},$$

on trouve

$$S_n = \mp \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots(n-1)n};$$

car elle est vraie encore pour

$$S_{n+1} = S_n \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$$= \pm \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)}{1.2\ldots n(n+1)}.$$

Quand m est un nombre entier, le dernier terme a pour valeur

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots(m-m+1)}{1.2\ldots m},$$

$$S_m = \mp \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)(m-m)}{1.2\ldots m} = 0,$$

à cause du facteur $m-m$.

On vérifie absolument de la même manière

$$0 = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p-1^p)}{1^p.2^p} - \frac{m^p(m^p-1^p)(m^p-2^p)}{1^p.2^p.3^p} + \ldots$$

quand p est un nombre entier ainsi que m.

Le principal objet de cette Note était l'établissement de la formule (4) et de la formule (6) ; le formule (6) est précisément le sujet de la question 479. J'ai été assez surpris de voir indiquée une formule que j'avais trouvée depuis longtemps déjà, et c'est ce qui m'a décidé à publier ce petit travail. Loin de moi néanmoins l'idée de vouloir disputer à M. Stern la priorité d'une formule, assez curieuse, sans aucun doute, que nous avons trouvée séparément.