

ANGE LE TAUNÉAC

Sur les coefficients binomiaux (voir p. 6)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 147-148

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__147_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir p 8),

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Cette question est intéressante, mais elle n'a pas été complètement résolue. En effet, si l'on emploie les formules

$$S_1 = \frac{2^m + (1 + \sqrt{-1})^m + (1 - \sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m + (1 + \sqrt{-1})^m - (1 - \sqrt{-1})^m}{4}$$

(formules que je n'ai pas vérifiées) (*), on se trouve, pour ainsi dire, ramené au point de départ. Du reste, il est facile de les transformer en d'autres qui ne présentent pas le même inconvénient.

On a, identiquement,

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{-1} &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

(*) Elles sont évidentes dès qu'on connaît $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. Tm.

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

et, par suite,

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}} \left(\cos \frac{m\pi}{4} + \sqrt{-1} \sin \frac{m\pi}{4} \right),$$

$$(1 - \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}} \left(\cos \frac{m\pi}{4} - \sqrt{-1} \sin \frac{m\pi}{4} \right).$$

On déduit, de ces valeurs :

$$S_1 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1} \cos \frac{m\pi}{4},$$

$$S_2 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1} \cos \frac{m\pi}{4},$$

$$S_3 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1} \sin \frac{m\pi}{4},$$

$$S_4 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1} \sin \frac{m\pi}{4}.$$

Soit, par exemple, $m = 15$. On aura

$$S_1 = 2^{13} + 2^6 = 8256,$$

$$S_2 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_3 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_4 = 2^{13} + 2^6 = 8256;$$

ce qui est exact.

Paris, 8 janvier 1861.