NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGE LE TAUNÉAC

Sur les coefficients binomiaux (voir p. 6)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 147-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__147_1>

SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir p 8),

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Cette question est intéressante, mais elle n'a pas été complétement résolue. En effet, si l'on emploie les formules

$$S_1 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4}$$

(formules que je n'ai pas vérifiées) (*), on se trouve, pour ainsi dire, ramené au point de départ. Du reste, il est facile de les transformer en d'autres qui ne présentent pas le même inconvénient.

On a, identiquement,

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{-1} &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

(*) Elles sont evidentes dès qu'on connaît $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. TM.

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

et, par suite,

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{4}\right),$$

$$(1 - \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{4}\right).$$

On déduit, de ces valeurs :

$$S_1 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4},$$

$$S_2 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4},$$

$$S_3 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4},$$

$$S_4 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4}.$$

Soit, par exemple, $m = 15$. On aura

$$S_1 = 2^{13} + 2^6 = 8256,$$

$$S_2 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_3 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_4 = 2^{13} + 2^6 = 8256;$$

ce qui est exact.

Paris, 8 janvier 1861.