

A. DEMONGEOT

Sur la résolution des équations du troisième degré au moyen des tables trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20 (1861), p. 143-147

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__143_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ
AU MOYEN DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES;**

PAR A. DEMONGEOT,
Elève du lycée de Besançon.

La résolution de l'équation du troisième degré privée de second terme peut dans tous les cas se ramener à la trisection de l'angle, pourvu qu'on admette les angles imaginaires de la forme $x + iy$.

Je laisse de côté le cas bien connu où les trois racines sont réelles.

II^e CAS où l'on a $p < 0$ et deux racines imaginaires. — L'équation est, en rendant explicite le signe de p ,

$$(1) \quad u^3 - pu + q = 0,$$

et celle qui donne le cosinus du tiers d'un arc en fonction du cosinus de cet arc, est

$$(2) \quad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x + iy)}{4} = 0.$$

En posant dans la première équation

$$u = \lambda z$$

afin d'introduire une nouvelle indéterminée qui rende l'identification possible, il vient

$$(3) \quad z^3 - \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0.$$

Cette équation sera identique avec l'équation (2) si l'on prend

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = -\frac{q}{2 \sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

ou (voir la *Trigonométrie* de M. Serret, 2^e édition, p. 212)

$$(e^x + e^{-x}) \cos y - i(e^x - e^{-x}) \sin y = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

On voit que le terme en $\sin y$ doit être nul, condition qui sera satisfaite si $y = 0$. Alors l'équation précédente se réduit à

$$e^x + e^{-x} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

qui donne, en posant (voir la *Résolution trigonométrique de l'équation du deuxième degré*)

$$\sin 2\varphi = -\frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^x = \tan \varphi, \quad e^{-x} = \cot \varphi.$$

L'angle φ est réel, comme il est facile de s'en assurer,

(145)

et les racines de l'équation proposée sont :

$$u' = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{i\gamma}{3},$$

$$u'' = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{2\pi + i\gamma}{3},$$

$$u''' = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{4\pi + i\gamma}{3}.$$

Développant et posant

$$\text{tang } \psi = \sqrt[3]{\text{tang } \varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \text{coséc } 2\psi,$$

$$u'' = -\sqrt{\frac{p}{3}} \text{coséc } 2\psi - i \sqrt{p} \cot 2\psi,$$

$$u''' = -\sqrt{\frac{p}{3}} \text{coséc } 2\psi + i \sqrt{p} \cot 2\psi.$$

III^e cas. $p > 0$. — Les équations (1), (2), (3) sont alors, rendant toujours explicite le signe de p ,

$$(1) \quad u^3 + pu + q = 0,$$

$$(2) \quad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x + i\gamma)}{4} = 0,$$

$$(3) \quad z^3 + \frac{p}{\lambda^2}z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

et l'on identifiera les deux dernières en prenant

$$\lambda = 2i \sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = \frac{-qi}{z \sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$(e^{\gamma} + e^{-\gamma}) \cos x - i(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) \sin x = \frac{-qi}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

On voit que le terme en $\cos x$ doit être nul, condition remplie si $x = \frac{\pi}{2}$; alors l'équation précédente se réduit à

$$e^{\gamma} - e^{-\gamma} = \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

qui donne, en posant

$$\operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^{\gamma} = \operatorname{tang} \varphi, \quad e^{-\gamma} = -\operatorname{cot} \varphi,$$

l'angle 2φ est toujours réel puisqu'on suppose $p > 0$, et les racines de l'équation proposée sont

$$u' = 2i \sqrt{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{i\gamma}{3}\right),$$

$$u'' = 2i \sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{i\gamma}{3}\right),$$

$$u''' = 2i \sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{i\gamma}{3}\right).$$

Développant les seconds membres et posant comme précédemment

$$\operatorname{tang} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi + i \sqrt{p} \operatorname{cosec} 2\psi,$$

$$u'' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi - i \sqrt{p} \operatorname{cosec} 2\psi,$$

$$u''' = -2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi. \quad (\text{Voir t. XVII, p. 386.})$$