A. DEMONGEOT

Sur la résolution des équations du troisième degré au moyen des tables trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 143-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__143_1>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ AU MOYEN DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR A. DEMONGEOT,
Elève du lycée de Besançon.

La résolution de l'équation du troisième degré privée de second terme peut dans tous les cas se ramener à la trisection de l'angle, pourvu qu'on admette les angles imaginaires de la forme $x + iy$.

Je laisse de côté le cas bien connu où les trois racines sont réelles.

II[e] CAS où l'on a $p < 0$ et deux racines imaginaires. — L'équation est, en rendant explicite le signe de p,

$$u^3 - pu + q = 0, \tag{1}$$

et celle qui donne le cosinus du tiers d'un arc en fonction du cosinus de cet arc, est

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x + iy)}{4} = 0. \tag{2}$$

En posant dans la première équation

$$u = \lambda z$$

afin d'introduire une nouvelle indéterminée qui rende l'identification possible, il vient

$$z^3 - \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0. \tag{3}$$

Cette équation sera identique avec l'équation (2) si l'on prend

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = -\frac{q}{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

ou (*voir* la *Trigonométrie* de M. Serret, 2[e] édition, p. 212)

$$(e^y + e^{-y})\cos x - i(w^y - e^{-y})\sin x = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

On voit que le terme en $\sin x$ doit être nul, condition qui sera satisfaite si $x = 0$. Alors l'équation précédente se réduit à

$$e^y + e^{-y} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

qui donne, en posant (*voir* la ***Résolution** trigonométrique de l'équation du deuxième degré*)

$$\sin 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^y = \tang\varphi, \qquad e^{-y} = \cot\varphi.$$

L'angle φ est réel, comme il est facile de s'en assurer, et les racines de l'équation proposée sont :

$$u' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{iy}{3},$$

$$u'' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi + iy}{3},$$

$$u''' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{4\pi + iy}{3}.$$

Développant et posant

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{coséc}2\psi,$$

$$u'' = -\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{coséc}2\psi - i\sqrt{p}\cot 2\psi,$$

$$u''' = -\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{coséc}2\psi + i\sqrt{p}\cot 2\psi.$$

III[e] CAS. $p > 0$. — Les équations (1), (2), (3) sont alors, rendant toujours explicite le signe de p,

(1) $$u^3 + pu + q = 0,$$

(2) $$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x+iy)}{4} = 0,$$

(3) $$z^3 + \frac{p}{\lambda^2}z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

et l'on identifiera les deux dernières en prenant

$$\lambda = 2i\sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = \frac{-qi}{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$(e^y + e^{-y}) \cos x - i\,(e^y - e^{-y}) \sin x = \frac{-qi}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

On voit que le terme en $\cos x$ doit être nul, condition remplie si $x = \frac{\pi}{2}$; alors l'équation précédente se réduit à

$$e^y - e^{-y} = \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

qui donne, en posant

$$\operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^y = \operatorname{tang}\varphi, \qquad e^{-y} = -\cot\varphi,$$

l'angle 2φ est toujours réel puisqu'on suppose $p > 0$, et les racines de l'équation proposée sont

$$u' = 2i\sqrt{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{iy}{3}\right),$$

$$u'' = 2i\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{iy}{3}\right),$$

$$u''' = 2i\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{iy}{3}\right).$$

Développant les seconds membres et posant comme précédemment

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi + i\sqrt{p} \operatorname{coséc} 2\psi,$$

$$u'' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi - i\sqrt{p} \operatorname{coséc} 2\psi,$$

$$u''' = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi.$$ (*Voir* t. XVII, p. 386.)