NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DE VIRIEU

Solution de la question 557

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 135-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__135_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 557

(voir t. XIX, p. 464);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

Énoncé :

$$\frac{x}{x^2+1^2}+\frac{x}{x^2+2^2}+\frac{x}{x^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{2}\pi \quad \text{pour} \quad \lim x=0.$$

1. Il nous semble que, dans l'hypothèse dont il s'agit, la limite de la série proposée est zéro (*).

Posons

$$\varphi(x,n)=\frac{x}{x^2+1^2}+\frac{x}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{x}{x^2+n^2},$$

$$f(x,n)=\frac{1}{x^2+1^2}+\frac{1}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{x^2+n^2},$$

d'où

$$\varphi(x,n)=x f(x,n).$$

(*) J'ai copié cette équation, sans examen, dans je ne sais quel journal allemand. TM.

Pour des valeurs quelconques finies de x et de n, on a

$$\mathrm{f}(x,n) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2};$$

cette dernière somme, quand le nombre de ses termes augmente, tend constamment vers une limite finie, savoir $\frac{1}{6}\pi^2$ (Euler, *Introductio in analysin*, vol. I, p. 131) :

$$\mathrm{f}(x,n) < \frac{6}{1}\pi^2, \quad \varphi(x,n) < \frac{1}{6}\pi^2 x, \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

r représentant un nombre absolu aussi petit qu'on voudra, mais non nul, alors pour

$$0 < x < \frac{6}{\pi^2} r,$$

on aura

$$\varphi(x,n) < r,$$

quel que soit n.

2. On peut donc trouver un nombre absolu, non nul, tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme d'un nombre quelconque de termes de la série proposée soit inférieure à un nombre absolu donné, quelque petit que soit ce dernier; la limite est donc zéro.

3. On peut arriver au même résultat sans avoir recours à la limite d'une autre série.

x étant positif et non nul, chaque terme de la série proposée est plus petit que le précédent; donc, n étant un entier fixe,

$$\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \frac{x}{x^2+3^2} + \ldots + \frac{x}{x^2+n^2} < \frac{nx}{x^2+1},$$

r étant un nombre absolu, non nul, inférieur à $\frac{1}{2}$ et aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$\frac{nx}{x^2+1} < r$$

est remplacée par les suivantes :

$$rx^2 - nx + r > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2-4r^2}{4} > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n-\sqrt{n^2-4r^2}}{2}\right)\left(rx - \frac{n-\sqrt{n^2-4r^2}}{2}\right) > 0,$$

$$x < \frac{n-\sqrt{n^2-4r^2}}{2r}, \quad x > \frac{n+\sqrt{n^2-4r^2}}{2r},$$

donc

$$0 < x < \frac{2r}{n+\sqrt{n^2+4r^2}} \frac{x}{x^2+1^2} + \ldots + \frac{x}{x^2+n^2} < \frac{nx}{x^2+1} < r.$$

4. Quel que soit le nombre de termes consécutifs de la série proposée que l'on veut ajouter, il existe un nombre tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme dont il s'agit soit plus petite qu'un nombre absolu donné, non nul, quelque petit que soit ce dernier ; la limite ne peut donc être que zéro.

Note. MM. Pirain et Kessler, élèves du lycée Saint-Louis, emploient cette considération.

Soit la courbe donnée par l'équation

$$y = \frac{a}{a^2+x^2},$$

l'aire de cette courbe est

$$\int y\,dy = \text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{constante}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine où $x = 0$ l'aire est nulle, alors la constante est aussi nulle; mais on ne peut plus supposer ensuite $a = 0$, arc tang $\frac{0}{0}$ est une expression indéterminée.