

J. DE VIRIEU

Solution de la question 543

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 122-125

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__122_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 545

(voir t. XIX, p. 361);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

1. x, y désignant des inconnues; a, b, c, d des quantités connues liées entre elles par les relations

$$(I) \quad a + b = c^2, \quad a - b = d^2,$$

le système

$$(A) \quad ax - by = x^2 - y^2, \quad bx + ay = 4xy$$

a les quatre solutions suivantes

$$x = \frac{1}{8} [(c + d)(2c^2 - 3dc + 2d^2) - cd(c - d)\sqrt{3.i}],$$

$$x = \frac{1}{8} [(c + d)(2c^2 - 3dc + 2d^2) + cd(c - d)\sqrt{3.i}],$$

$$x = \frac{1}{4} (c + d)(c^2 + d^2),$$

$$x = 0;$$

$$\text{ou } i = \sqrt{-1}.$$

$$y = \frac{1}{8} [(c - d)(2c^2 + 3dc + 2d^2) + cd(c + d)\sqrt{3.i}],$$

$$y = \frac{1}{8} [(c - d)(2c^2 + 3dc + 2d^2) - cd(c + d)\sqrt{3.i}],$$

$$y = \frac{1}{4} (c - d)(c^2 + d^2),$$

$$y = 0.$$

2. En supposant d'abord qu'aucune des quantités a , b ne soit nulle, la valeur qui annule $4y - b$ ne peut faire partie d'une solution du système A; ce dernier est donc équivalent au suivant :

$$\begin{aligned} x &= \frac{ay}{4y - b}, \\ \frac{y}{4y - b} [a^2 - b(4y - b)] \\ &= \frac{y^2}{(4y - b)^2} [a + (4y - b)][a - (4y - b)] \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x &= \frac{ay}{4y - b}, \\ y(4y - b)[a^2 - b(4y - b)] \\ &= y^2 [a + (4y - b)][a - (4y - b)], \end{aligned}$$

ce qui donne la solution $y = 0$, $x = 0$. Il reste à résoudre le système

$$(4y - b)[a^2 - b(4y - b)] = y[a + (4y - b)][a - (4y - b)],$$

$$x = \frac{ay}{4y - b},$$

qu'on remplace par le suivant

$$y = \frac{z + b}{4}, \quad x = \frac{a}{4} \frac{z + b}{z}, \quad z^3 - 3bz^2 + 3a^2z - a^2b = 0,$$

et enfin, en posant $z = u + b$, par

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) &= 0, \\ y &= \frac{1}{4}(u + 2b), \\ x &= \frac{a}{4} \frac{u + 2b}{u + b} \end{aligned} \right.$$

3. On a identiquement

$$\begin{aligned} & u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(u^2 - b^2) \\ &= (u + b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2) - a^2b; \end{aligned}$$

donc, pour les valeurs de u racines de l'équation du troisième degré du système (B),

$$\begin{aligned} \frac{1}{u + b} &= \frac{u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2}{a^2b}, \\ \frac{u + 2b}{u + b} &= \frac{(u + 2b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2)}{a^2b} \\ &= \frac{[u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2)] + [bu^2 - b^2u + 4ba^2 - 2b^3]}{a^2b} \\ &= \frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Le système (B) est donc remplacé par le suivant

$$(C) \quad \begin{cases} u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) = 0, \\ y = \frac{1}{4}(u + 2b), \\ x = \frac{1}{4} \left(\frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a} \right). \end{cases}$$

4. On sait que les racines de

$$v^3 + 3pv + 2q = 0$$

se déduisent de la formule

$$\alpha \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

en remplaçant successivement α par chacune des racines cubiques de l'unité positive. L'application de cette for-

mule à la dernière équation en u donne

$$\begin{aligned} u &= \alpha \sqrt[3]{-b(a^2 - b^2) + \sqrt{+b^2(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^3}} \\ &+ \alpha^2 \sqrt[3]{-b(a^2 - b^2) - \sqrt{+b^2(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^3}} \\ &= \alpha \sqrt[3]{(a - b)(a^2 - b^2)} + \alpha^2 \sqrt[3]{(-a - b)(a^2 - b^2)} \\ &= \sqrt[3]{(a^2 - b^2)} [\alpha \sqrt[3]{(a - b)} - \alpha^2 \sqrt[3]{(a + b)}]; \end{aligned}$$

ou enfin, en tenant compte des relations (I),

$$u = \alpha d^2 c - \alpha^2 d c^2.$$

5. Substituant dans l'équation (C) cette valeur de u , on a

$$y = \frac{1}{4} (c^3 - \alpha^2 d c^2) + \alpha d^2 c - d^3,$$

$$x = \frac{1}{4} \frac{c^6 + \alpha^2 d c^5 + \alpha d^2 c^4 + 2 d^3 c^3 + \alpha^2 d^4 c^2 + \alpha d^5 c + d^6}{c^3 + d^3},$$

ou

$$y = \frac{1}{4} (c^3 - \alpha^2 d c^2 + \alpha d^2 c - d^3),$$

$$x = \frac{1}{4} (c^3 + \alpha^2 d c^2 + \alpha d^2 c + d^3).$$

Posant tour à tour

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}.i}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}.i}{2}, \quad \alpha = 1,$$

on a les trois premières solutions du n° 1.

Les formules de ce numéro subsistent encore quand une des quantités a , b est nulle ou que toutes deux le sont : ces formules sont donc générales.