NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARÉNOU
LAQUIÈRE

Solution de la question 418 (Laffitte)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 97-99
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__97_0>

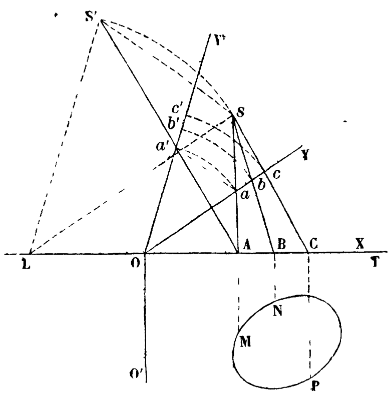
SOLUTION DE LA QUESTION 418 (LAFFITTE)

(voir t. XVII, p. 31);

PAR MM. E. CARÉNOU ET M. LAQUIÈRE,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Deux figures étant en perspective, si leurs plans tournent autour de leur commune intersection, il faut, pour que ces figures restent en perspective, que l'œil change de position; les perpendiculaires abaissées chaque fois du point de vue sur ces plans restent dans un rapport constant.

Soient OX, OY les intersections des deux plans par le plan mené par le premier point de vue S, perpendiculairement à l'intersection commune OO' des deux premiers plans (*). Nous allons démontrer qu'il existe dans ce même



plan un point unique S', par rapport auquel les deux fi-

(*) Dans la figure les deux parties séparées par la ligne LT sont supposées dans des plans rectangulaires.

gures seront en perspective lorsque le plan O′OY sera mené en O′OY′.

Considérons les différents points M, N, P, etc., situés dans le plan fixe. Appelons m, n, p, etc., leurs perspectives dans le premier système (dans le plan O′OY), et m', n', p', etc., les nouvelles positions des points m, n, p, etc., lorsque le plan du tableau aura pris la position O′OY′.

Soient A, B, C, etc., les projections orthogonales de M, N, P, etc., sur OX. Si nous joignons SA, SB, SC, etc., les points a, b, c, etc., d'intersection de ces droites avec OY seront les projections sur OY des points m', n', p', etc., homologues des premiers; lorsque le tableau aura pris la nouvelle position O′OY′, les points a, b, c, etc., seront devenus a', b', c', etc., projections sur OY′ de m', n', p'.

Les équations des droites Aa, Bb, Cc, etc., issues du point S, étant

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1, \quad \frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}=1\ldots,$$

par rapport aux axes OX, OY, si nous joignons Aa', Bb', Cc', etc., leurs équations seront les mêmes par rapport aux axes OX, OY′. Par conséquent, (α, β) étant les coordonnées du point S dans le premier système, le point S′, qui aura aussi (α, β) pour coordonnées dans le second système de coordonnées, sera situé sur toutes les droites Aa', Bb', etc.

Les distances δ, δ' du point S aux deux plans XOO′, YOO′ sont

$$\delta=\beta \sin \mathrm{YOX}, \quad \delta'=\alpha \sin \mathrm{YOX}.$$

Le rapport

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\beta}{\alpha}$$

sera le même pour le point S′, puisqu'il est indépendant de l'angle des deux plans. On peut du reste remarquer que, le tableau tournant autour de OO′, le point S′ décrit un cercle de rayon β ayant son centre en L, pied de l'ordonnée d'une quelconque de ses positions dans le système de coordonnées correspondant.

Cela posé, pour démontrer que les points m', n', p', etc., sont les perspectives des points M, N, P, etc., par rapport au point S′, il suffit de prouver que l'on a

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'}.$$

Car alors la droite $\mathrm{M}m'$ passera par S′; il en serait de même des autres.

Or les points $m\mathrm{M}'$ étant en perspective par rapport à S, on a

$$\frac{\mathrm{AM}}{am} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a}$$

ou

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a} \qquad (am = a'm').$$

Mais les triangles S′LS, $a'\mathrm{O}\alpha$ étant isocèles et ayant les côtés égaux parallèles deux à deux, leurs bases SS′, aa' sont parallèles; d'où

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'},$$

et, à cause du rapport commun $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a}$,

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'},$$

et le théorème est démontré.