

E. MAILLOT

Solution géométrique de la question 502

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 88-91

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__88_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

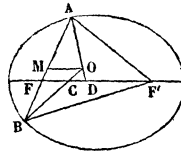
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 502

(voir p. 85);

PAR M. E. MAILLOT,
Élève de Spéciales au collège Stanislas.

Par un foyer d'une ellipse, on mène une corde AB; par le point de rencontre O des deux normales en A et B, on mène une parallèle au grand axe : cette parallèle passe par le milieu de AB.

FIG. 1.



Soit AB une corde passant au foyer F; on mène AO, BO normales à la courbe en A et B et par leur point de rencontre OM parallèle au grand axe : M sera le milieu de AB.

En effet, à cause des triangles semblables AMO, AFD d'une part, BFC, BMO de l'autre, on a

$$AM = MO \cdot \frac{AF}{FD},$$

$$BM = MO \cdot \frac{BF}{FC}.$$

Mais les rapports $\frac{AF}{FD}$, $\frac{BF}{FC}$ sont égaux; car les bissectrices AD, BC des angles A et B dans les triangles FAF', FBF'

partagent la base FF' en segments tels , qu'on a

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AF + AF'}{FF'} = \frac{a}{c} = \frac{BF + BF'}{FF'} = \frac{BF}{FC};$$

donc

$$AM = BM.$$

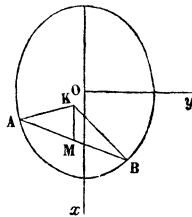
C. Q. F. D.

Corollaire (*). Si l'on place l'ellipse de sorte que son grand axe soit vertical, une droite pesante et homogène AB sera en équilibre si elle passe au foyer.

Car la résultante des réactions est égale et opposée à la pesanteur qui s'applique en M .

Remarque. La condition que la droite passe au foyer est suffisante pour l'équilibre, mais est-elle nécessaire? Ou plus généralement : Si par le point de rencontre des

FIG. 2.



normales qui ont leurs pieds aux extrémités d'une corde quelconque on mène une parallèle au grand axe, dans quel cas cette parallèle coupe-t-elle la corde en son milieu?

Soient

$$(1) \quad y = m.x + n$$

l'équation de la corde AB ;

(*) Cette partie de cette belle solution a déjà été traitée (tome XVII, page 195). Tm.

$$(2) \quad a^2 y' + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

celle de l'ellipse. Les coordonnées des points A, B, intersections de la corde et de l'ellipse, sont

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{-a^2 mn \pm ab \sqrt{a^2 m^2 + b^2 - n^2}}{a^2 m^2 + b^2}, \\ y = \frac{b^2 n \mp amb \sqrt{a^2 m^2 + b^2 - n^2}}{a^2 m^2 + b^2}. \end{cases}$$

Les équations des deux normales menées par ces points sont de la forme

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x').$$

L'ordonnée du point K où ces normales se coupent est, ayant égard aux valeurs trouvées de x' et de y'

$$(4) \quad y_1 = \frac{c^2}{n} \cdot \frac{a^2 m^2 - n^2}{a^2 m^2 + b^2}.$$

où $c^2 = a^2 - b^2$.

Nous aurons la relation cherchée entre m , n , en exprimant que y_1 est égal à la demi-somme des ordonnées des points A, B; cette demi-somme, d'après l'équation (3), est

$$(5) \quad \frac{y' + y''}{2} = \frac{b^2 n}{a^2 m^2 + b^2}.$$

Égalons les équations (4) et (5), il vient

$$n = \pm mc.$$

Donc l'équation de la corde sera

$$y = m (x \pm c).$$

Le double signe convient à la question géométrique,

mais celle d'équilibre est moins générale et n'admet que le signe positif. En discutant cette équation

$$y = m(x + c),$$

on voit que pour l'équilibre il faut, si m n'est pas infini, que la droite passe au foyer; si m est nul, elle coïncide avec le grand axe; mais si m est infini, la droite est horizontale et en équilibre dans toute la moitié inférieure de l'ellipse.
