NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES KESSLER

Seconde solution de la question 493

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 83-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__83_1>

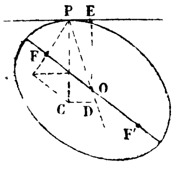
SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 493

(voir p. 5);

PAR M. CHARLES KESSLER,
Élève du Prytanée Militaire.

Soit P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, O le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP : on a CD égal au tiers du rayon de courbure de la développée en C.

(ABEL TRANSON.)



Soit une ellipse, O son centre, P un point quelconque, C le centre de courbure en ce point, FF' l'axe focal. Faisons la construction indiquée. Soit ρ le rayon de courbure CP au point P de l'ellipse. On sait que, OE étant la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente PE,

(*Méthodes en géométrie* de M. P. Serret)

$$\rho = \frac{b'^2}{\mathrm{OE}} = \frac{b'^3}{ab},$$

en posant

$$\mathrm{OP} = a',$$

et le demi-diamètre conjugué $= b'$; car on calcule facilement OE en fonction du rayon vecteur

$$\mathrm{OE} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - a'^2}} = \frac{ab}{b'}.$$

Désignons par α l'angle CPD, on a (triangle PCD)

$$(1) \qquad \mathrm{CD} = \rho \operatorname{tang}\alpha = \rho \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Or, dans le triangle OPE on a

$$\mathrm{OE} = a' \cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OE}}{a'} = \frac{ab}{a'b'},$$

et, par conséquent, substituant dans l'équation (1),

$$\mathrm{CD} = \frac{b'^3}{ab} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}}}{\frac{ab}{a'b'}} = \frac{b'^3}{a^2b^2} \sqrt{a'^2b'^2 - a^2b^2},$$

Désignons maintenant par p' le rayon de courbure de la développée en C. On sait que

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho},$$

d'où

$$\rho' = 3\rho \operatorname{tang}\alpha,$$

et substituant les valeurs trouvées de ρ et de $\tang\alpha$, on a

$$\rho' = 3\,\mathrm{CD},$$

car

$$\rho \tang\alpha = \mathrm{CD},$$

donc on a bien

$$\mathrm{CD} = \frac{\rho'}{3}.$$

C. Q. F. D.

Pour l'hyperbole, on changera b^2, b'^2 en $-b^2, -b'^2$, et on aura le même résultat.