NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 67-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__67_0>

APPLICATION

De la transformation par rayons vecteurs réciproques (*) à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données;

PAR M. A. MANNHEIM.

1. M. Dupin, à la p. 22 du t. I[er] de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, a montré que les lignes de courbure de la surface dont il s'agit sont des circonférences; à la p. 420 du t. II[e], le même géomètre a donné l'analyse d'un Mémoire, qui n'a pas été imprimé, relatif aux principales propriétés de cette surface; enfin, dans les *Applications de Géométrie*, p. 200, on trouve les démonstrations de la plupart des propriétés de cette même surface, que M. Dupin désigne sous le nom de *cyclide*.

Je me propose de faire voir comment, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on arrive simplement aux propriétés connues de la cyclide et à d'autres qui n'ont pas été remarquées.

Je vais d'abord montrer qu'on peut toujours transformer une cyclide en tore; cette transformation étant faite, il ne restera plus qu'à revenir des propriétés du tore aux propriétés de la cyclide.

2. LEMME. *On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères ayant leurs centres en ligne droite. Le lieu des pôles de transformation est la circonférence qui coupe à angle droit les grands cercles des sphères données situés dans le plan passant par leurs centres.*

(*) Nous ne ferons usage dans ce travail que de cette transformation et nous sous-entendrons les mots : *par rayons vecteurs réciproques*.

Il est bien évident que les pôles de transformation doivent être dans le plan des centres des sphères données. Il est bien clair aussi que si nous transformons les grands cercles situés dans ce plan en trois autres dont les centres sont en ligne droite, la même transformation donnera lieu pour les trois sphères à trois autres sphères dont les centres sont en ligne droite.

Le problème est donc ramené à ce problème de géométrie plane : *Transformer trois cercles en trois autres cercles dont les centres sont en ligne droite.*

Chacun des points de la circonférence qui coupe orthogonalement les circonférences données, peut être pris pour pôle de transformation. En effet, si l'on prend un de ces points pour pôle, cette circonférence orthogonale se transforme en une droite qui coupe à angle droit les transformées des circonférences données; cette droite coupant à angle droit ces transformées, contient leurs centres; donc, etc.

3. *La cyclide se compose généralement de quatre nappes.*

D'après le lemme précédent, nous pouvons transformer les trois sphères données en trois autres sphères dont les centres sont en ligne droite, c'est-à-dire transformer la cyclide en tore.

Examinons ce qui se passe dans le cas particulier où les centres des sphères données sont en ligne droite. Pour cela, menons par cette ligne un plan quelconque qui coupe les sphères suivant trois cercles. On peut généralement mener à ces circonférences huit circonférences tangentes, mais ces huit circonférences sont symétriques deux à deux par rapport à la ligne des centres des circonférences données. En faisant tourner toute la figure autour de cette droite, on n'engendrera donc que quatre tores. A ces quatre tores correspondent les quatre nappes de la cyclide. Les huit cercles qui engendrent les quatre tores pouvant se réduire selon les positions relatives des grands cercles auxquels ils sont tangents, on voit que ce n'est que dans le cas le plus général que la cyclide se compose de quatre nappes.

4. *Les nappes de la cyclide se coupent deux à deux suivant des circonférences.*

Car les tores provenant de la transformation de la cyclide se coupent deux à deux suivant des circonférences. Nous verrons plus loin que ces intersections sont des lignes de courbure de la cyclide. En transformant les tores pour revenir à la cyclide, on peut prendre le pôle de transformation sur la surface de l'un d'eux ou en un point de l'une des circonférences résultant de leur intersection; dans le premier cas, la cyclide a une nappe s'étendant à l'infini; dans le deuxième cas, il y a deux nappes s'étendant à l'infini.

Nous allons étudier en particulier l'une des nappes de la surface, c'est-à-dire la cyclide provenant de la transformation d'un tore.

5. *Les lignes de courbure de la cyclide sont des circonférences* (*).

Le tore a pour lignes de courbure les méridiens et les parallèles; comme ces lignes sont des circonférences, leurs transformées sont aussi des circonférences; donc, etc.

6. *Le plan d'une ligne de courbure de la cyclide coupe cette surface partout sous le même angle.*

Par un point quelconque p de l'espace, on peut toujours faire passer des sphères contenant les parallèles ou les mé-

(*) *Voir* le Mémoire de M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 282).

ridiens d'un tore donné. Toutes ces sphères coupent le tore, le long de leurs lignes d'intersection, sous le même angle.

En transformant, le pôle de transformation étant en p, ces sphères deviennent les plans des lignes de courbure de la cyclide; donc, etc.

En transformant par rapport à un point quelconque, on voit que :

Une sphère qui rencontre une cyclide suivant une ligne de courbure, coupe cette surface partout sous le même angle.

Ce théorème est un cas particulier du suivant :

Si une surface a une ligne de courbure sphérique, la sphère sur laquelle se trouve cette ligne de courbure coupe la surface partout sous le même angle (*).

Ce théorème comprend, comme cas particulier, le théorème suivant, de M. Joachimstahl, d'où on l'a déduit :

Si dans une surface une ligne de courbure est plane, le plan de cette ligne coupe la surface partout sous le même angle (**).

7. *La cyclide admet toujours deux plans tangents qui la touchent suivant des lignes de courbure.*

Par un point quelconque p de l'espace, on peut toujours mener deux sphères tangentes à un tore. Les lignes de contact sont un méridien et un parallèle, ou deux méridiens, ou deux parallèles.

En prenant p pour pôle de transformation, le tore devient une cyclide et les sphères tangentes des plans tangents à cette surface. Les lignes de contact sont les trans-

---

(*) Voir *Journal* de M. Liouville, t. XVIII, p. 128, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques;* par M. J.-A. Serret.

(**) Voir *Journal* de M. Crelle, t. XXX, p. 347, et *Nouvelles Annales.*

formées des lignes de courbure du tore, c'est-à-dire des lignes de courbure de la cyclide.

Lorsque les deux plans touchent la cyclide suivant des lignes de courbure d'un même système, cette surface peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère tangente à deux plans et à une sphère donnée.

8. *La cyclide peut être considérée de deux manières différentes, comme la surface enveloppe de sphères tangentes à trois autres.*

Le tore peut être considéré comme l'enveloppe d'une sphère tangente à trois autres dont les centres sont en ligne droite, ou comme l'enveloppe de sphères tangentes à trois autres sphères dont les rayons sont égaux. La transformation des sphères de chacun de ces systèmes de génération conduit aux deux systèmes de sphères dont la cyclide est l'enveloppe.

Nous appellerons *premières sphères* de la cyclide, celles qui correspondent aux sphères de rayons égaux du tore, et *deuxièmes sphères* celles qui correspondent aux sphères enveloppant le tore, et dont les centres sont en ligne droite.

Si l'on se donne trois des premières sphères, les deuxièmes sphères enveloppent la cyclide, que l'on obtient encore en cherchant l'enveloppe des sphères tangentes à trois des deuxièmes sphères supposées fixes.

Il est facile de voir que pour le tore, dans l'un ou l'autre système de génération, les lieux des points de contact des sphères variables et des sphères fixes sont des circonférences; on a, d'après cela, par la transformation, le théorème suivant, dû à Dupuis (*) :

Les lieux des points de contact des sphères mobiles et des sphères fixes sont des circonférences.

(*) *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. I, p. 19; t. II, p. 422.

On peut ajouter que, *ces circonférences sont des lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères mobiles.*

9. *Le lieu des centres de courbure de la cyclide se compose de deux coniques situées dans des plans perpendiculaires entre eux.*

M. Dupin a démontré ce théorème d'une manière très-simple dans ses *Applications de Géométrie.*

Nous allons examiner séparément le lieu des centres des sphères de chacun des systèmes.

Commençons par le lieu des centres des deuxièmes sphères, c'est-à-dire qui correspondent à celles du tore qui ont leurs centres en ligne droite.

Les centres de ces sphères sont dans le plan passant par le pôle de transformation et par l'axe du tore qui a donné lieu à la cyclide que nous considérons.

Nous voyons donc déjà que le lieu des centres des deuxièmes sphères est une courbe plane; nous pouvons ajouter que le plan de cette courbe est un plan de symétrie de la cyclide. Ce plan coupe la cyclide suivant deux circonférences, le lieu des centres est maintenant facile à trouver, puisque ce n'est autre chose que le lieu des points également distants de ces deux circonférences, c'est-à-dire une conique ayant pour foyers les centres de ces circonférences.

Examinons le lieu des centres des premières sphères.

Par le pôle p, menons une sphère coupant orthogonalement le tore, qui par la transformation conduit à la cyclide que nous considérons; à cette sphère correspond un plan qui doit contenir les centres des premières sphères. Ce plan est évidemment un plan de symétrie de la cyclide.

Les centres des premières sphères doivent se trouver aussi sur la surface conique, que l'on obtient en joignant p aux centres des premières sphères du tore.

Le lieu cherché étant sur un plan et sur un cône, est la courbe d'intersection de ces surfaces, c'est-à-dire une conique.

Le lieu des centres de courbure d'une cyclide se compose donc de deux coniques; il est facile de voir que chacune d'elles a pour sommets les foyers de l'autre.

La sphère qui passe par p et qui coupe orthogonalement le tore, a son centre sur l'axe de cette surface; elle est donc coupée à angle droit par tous les plans méridiens; mais par la transformation elle devient un plan de symétrie de la cyclide; ce plan doit donc être perpendiculaire au plan méridien passant par p, qui est aussi plan de symétrie de la cyclide. Nous voyons donc que les plans de symétrie de la cyclide sont perpendiculaires entre eux.

10. *Les plans des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, passent par deux droites perpendiculaires entre elles.*

Par p faisons passer des sphères contenant les parallèles du tore transformé de la cyclide, toutes ces sphères se coupent suivant un petit cercle qui passe par p, dont le plan est perpendiculaire à l'axe du tore, et dont le centre est sur cet axe. De même, les sphères passant par p et qui contiennent les méridiens du tore, se coupent suivant une circonférence située dans le plan méridien qui contient p.

En transformant toutes ces sphères, on a les plans des lignes de courbure; tous ces plans passent par les transformées des deux circonférences que nous venons de trouver, c'est-à-dire par deux droites.

Chacune de ces droites est dans un plan de symétrie et perpendiculaire à l'autre; elles doivent donc être perpendiculaires entre elles.

Ces droites sont les axes radicaux des deux systèmes de sphères qui engendrent la cyclide.

Le théorème que nous venons de démontrer est un cas particulier du théorème suivant, dû à M. Bonnet (*) :

Dans toute surface à lignes de courbure planes, les plans des lignes de courbure d'un même système sont tangents à un cylindre, et les deux cylindres, enveloppes respectives des lignes de courbure du premier et du second système, ont leurs génératrices perpendiculaires.

11. *Les centres des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, sont sur deux courbes planes transformées de coniques.*

Les deux droites perpendiculaires entre elles que nous venons de trouver, coupent les plans de symétrie en deux points. Les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les tangentes aux coniques lieux des centres de courbure de la cyclide, ne sont autres que les centres des circonférences, lignes de courbure. On sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une conique, est la transformée d'une conique; donc, etc.

12. *Le lieu des sommets des cônes circonscrits à la cyclide le long des lignes de courbure se compose des axes radicaux des deux systèmes de sphères* (**).

On démontre facilement cette propriété, en remarquant que les plans de symétrie coupent la cyclide suivant des circonférences qui ont pour centres de similitude les points où ces mêmes plans sont coupés par les axes radicaux des systèmes de sphères.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 35e cahier, p. 137.

(**) *Voir* un Memoire de M. Chasles (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III, p. 341).

13. *Toute sphère doublement tangente à une cyclide coupe cette surface suivant deux circonférences* (*).

Il suffit, pour trouver ce théorème, de transformer celui de M. Villarceau : Un plan doublement tangent à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences.

14. *Les plans des circonférences, résultant de l'intersection de la cyclide avec une sphère qui lui est doublement tangente, sont eux-mêmes doublement tangents à la cyclide.*

Concevons un tore, un plan doublement tangent et les circonférences résultant de l'intersection de ces surfaces; par un point p, faisons passer des sphères qui contiennent chacune l'une de ces circonférences. Toutes ces sphères sont tangentes au tore. En transformant cette propriété, le pôle de transformation étant en p, on a le théorème que nous venons d'énoncer.

Les théorèmes 13 et 14 sont vrais pour le tore; on a donc le théorème suivant, qui comprend comme cas particulier celui de M. Villarceau.

Toute sphère doublement tangente à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences qui sont dans des plans doublement tangents au tore.

Voici encore une généralisation du même théorème :

Toute sphère doublement tangente à la surface engendrée par une circonférence qui tourne autour d'une droite quelconque, coupe cette surface suivant deux circonférences.

M. J.-A. Serret, en étudiant cette surface, a trouvé que, par chacun de ces points, il passe sept sections circulaires : le parallèle, deux circonférences imaginaires et qua-

---

(*) J'ai enonce le même theoreme sous une forme différente dans le t XV, p 60.

tre réelles qui sont, deux à deux, symétriques par rapport au plan méridien passant par le point considéré sur la surface. Par deux de ces circonférences symétriques on peut faire passer une sphère; cette sphère coupe alors la surface suivant deux circonférences qui ont deux points communs. Il y a en chacun de ces points deux tangentes qui sont à la fois tangentes à la surface donnée et à la sphère, c'est-à-dire que ces deux surfaces ont en deux points des plans tangents communs; elles sont donc doublement tangentes : d'où l'on peut déduire le théorème que nous venons d'énoncer.

NOTE A.

Nous avons vu que la cyclide peut être considérée de deux manières différentes comme l'enveloppe de sphères.

Au moyen du lemme, nous avons montré qu'on pouvait toujours transformer la cyclide en tore, et pour cela, nous avons cherché les pôles de transformation tels, que les deuxièmes sphères de la cyclide aient leurs centres en ligne droite.

En opérant ainsi, nous avons transformé les premières sphères en sphères de rayons égaux.

Nous pouvons donc dire :

On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères de rayons égaux; le lieu des pôles de transformation est une circonférence.

Il s'agit de voir comment cette circonférence est placée par rapport aux trois sphères données, et pour cela, il faut d'abord examiner sa position par rapport aux deuxièmes sphères.

Elle est dans le plan des centres des deuxièmes sphères, son centre est au point où ce plan est percé par l'axe radical des deuxièmes sphères, et son rayon est la racine carrée de la puissance de ce dernier point par rapport aux deuxièmes sphères.

Elle est donc dans le plan mené par l'axe radical des sphères données perpendiculairement à la ligne des centres de similitude externe de ces sphères. Son centre est à l'intersection de ce plan et de cette ligne, et son rayon est la racine carrée de la puissance de ce point d'intersection par rapport à l'une des circonférences touchant de la même manière les trois grands cercles des sphères données situées dans le plan des centres de ces dernières.

La circonférence, lieu des pôles transformations, est ainsi définie par rapport aux sphères données.

La puissance de l'un de ses points a, par rapport à l'une des sphères données, divisée par le rayon de cette sphère, est proportionnelle à l'inverse du rayon de la transformée de cette sphère, obtenue en prenant le pôle en a. On peut obtenir ainsi trois rapports, un pour chacune des sphères données; ces trois rapports doivent être égaux, puisque les rayons des transformées sont égaux. Nous pouvons donc dire :

Le lieu des points tels, que leurs puissances, par rapport à trois sphères données, soient entre elles comme les rayons de ces sphères, est une circonférence dont le plan est perpendiculaire au plan passant par les centres des sphères données.

NOTE B.

Nous avons vu que le lieu des centres des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, sont des courbes planes transformées de coniques. Nous pouvons déduire de là deux théorèmes de géométrie plane.

Ces transformées sont dans les plans de symétrie de la cyclide. Considérons l'un de ces plans et la transformée qu'il contient; ce plan coupe la cyclide suivant deux circonférences; et la droite, suivant laquelle se coupent les plans des lignes de courbure, dont nous considérons le lieu des centres, en un point qui est le centre de similitude des deux circonférences dont nous venons de parler.

On a donc dans ce plan de symétrie deux circonférences, l'un de leur centre de similitude et des droites issues de ce point, qui représentent les intersections des plans des lignes de courbure. Les points de la transformée sont les milieux des portions de ces droites comprises entre les circonférences. On peut donc dire :

Par le centre de similitude de deux circonférences on mène des transversales, on prend sur ces droites les points également distants des points anti-homologues qu'elles contiennent; le lieu de ces points est une transformée de conique.

Par une transformation facile, on déduit le théorème suivant :

Par le centre de similitude de deux circonférences on mène des transversales, on prend sur ces droites les conjuguées harmoniques du centre de similitude par rapport aux points anti-homologues qu'elles contiennent. Le lieu de ces points est une conique.

NOTE C.

Nous avons énoncé quelques propriétés des surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques.

Nous ajouterons encore la suivante, que nous allons généraliser :

Si une surface admet un système de lignes de courbures sphériques, toute surface qui lui est parallèle jouit de la même propriété.

La démonstration de ce théorème connu est immédiate, lorsque l'on s'appuie sur le théorème de M. Joachimstahl.

Nous allons le généraliser en le transformant, mais pour cela nous allons l'énoncer différemment.

On peut considérer une surface parallèle à une autre comme l'enveloppe de sphères égales constamment tangentes à celle-ci. Nous pouvons donc dire :

Si une surface admet un système de lignes de courbure sphériques, la surface enveloppe de sphères égales tangentes à la première surface jouit de la même propriété.

En transformant la surface donnée, on obtient une surface qui jouit encore de la propriété d'avoir des lignes de courbure sphériques. Les sphères se transforment en sphères tangentes à cette nouvelle surface, et comme elles ont des rayons égaux, leurs transformées sont telles, que, pour chacune d'elles, le rapport de la puissance du pôle de transformation à leur rayon est constant.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

On donne un point fixe p *et une surface qui admet un système de lignes de courbure sphériques; on construit les sphères tangentes à cette surface, telles que la puissance de* p, *par rapport à chaque sphère, divisée par le rayon de celle-ci, soit constante : l'enveloppe de toutes les sphères ainsi construites est une surface qui admet un système de lignes de courbure sphériques.*

Lorsque p est à l'infini, toutes les sphères ont le même rayon, et l'on retrouve le théorème d'où nous sommes partis.

Note du Rédacteur. Logocyclique (p. 28) : c'est l'enveloppe du cercle décrit sur le rayon vecteur comme diamètre.