NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. MOUTARD

Détermination du degré de l'équation de certaines surfaces enveloppes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 58-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__58_1>

DETERMINATION DU DEGRÉ DE L'ÉQUATION DE CERTAINES SURFACES ENVELOPPES;

PAR M. TH. MOUTARD.

On est fréquemment conduit, dans l'étude des surfaces et des lignes à double courbure algébriques, à rechercher le degré du résultat de certaines éliminations spéciales où l'application immédiate du théorème de Bezout conduirait à un nombre trop élevé. Plusieurs de ces questions, particulièrement celles qui se rapportent au contact des surfaces et aux surfaces enveloppes, se résolvent simplement par la considération de deux lieux géométriques, à savoir: 1° *le lieu du point dont les plans harmoniques par rapport à quatre surfaces données se coupent en un même point;* 2° *le lieu du point dont les plans harmoniques par rapport à trois surfaces données se coupent suivant une même droite.*

1. L'étude du premier de ces deux lieux n'offrant aucune difficulté, je me bornerai à énoncer les résultats auxquels elle conduit.

Soient donc

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0,$$

les équations de quatre surfaces algébriques mises sous forme homogène, désignons d'ailleurs par l, m, n, p leurs degrés respectifs et par x, y, z, t les coordonnées variables ; on trouve immédiatement que le lieu du point dont les plans harmoniques se coupent suivant un même point est la surface représentée par l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dL}{dx} & \frac{dL}{dy} & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \frac{dM}{dx} & \frac{dM}{dy} & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \frac{dN}{dx} & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{dP}{dz} & \frac{dP}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Le degré de cette surface étant égal à

$$(l + m + n + p - 4)$$

on a les théorèmes suivants :

1°. Dans le réseau des surfaces représentées par l'équation

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0,$$

où λ, μ, ν sont des constantes arbitraires, il y en a une infinité qui sont tangentes à la surface P ; le lieu des points de contact de toutes ces surfaces avec P est la courbe (P, Δ) d'ordre $p\,(l + m + n + p - 4)$.

2°. Dans le faisceau des surfaces représentées par l'équation

$$\lambda L + \mu M = 0,$$

il en existe en général $np\,(l+m+n+p-4)$ qui sont tangentes à la courbe d'intersection de $N=0$ et de $P=0$.

3°. L'équation de condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation d'une surface de degré m pour qu'elle soit tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces données, l'une de degré n, l'autre de degré p, est par rapport à ces coefficients de degré $np\,(2m+n+p-4)$.

4°. La surface enveloppe de toutes les surfaces de degré l dont les coefficients sont des fonctions de degré m de trois paramètres variables liés entre eux par deux relations, l'une de degré n, l'autre de degré p, est en général d'un ordre marqué par $lnp\,(2m+n+p-4)$.

2. Le lieu géométrique du point dont les plans harmoniques par rapport à trois surfaces passent par une même droite, consiste en une ligne à double courbure, dont la définition algébrique complète exige la connaissance de quatre surfaces. Soient en effet

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

les équations de trois surfaces algébriques respectivement d'ordre $\lambda+1$, $\mu+1$, $\nu+1$; les plans harmoniques d'un point x, y, z, t par rapport à ces surfaces ont pour équations

$$X\frac{dL}{dx}+Y\frac{dL}{dy}+Z\frac{dL}{dz}+T\frac{dL}{dt}=0,$$

$$X\frac{dM}{dx}+Y\frac{dM}{dy}+Z\frac{dM}{dz}+T\frac{dM}{dt}=0,$$

$$X\frac{dN}{dx}+Y\frac{dN}{dy}+Z\frac{dN}{dz}+T\frac{dN}{dt}=0.$$

Pour que ces trois plans passent par une même droite, il faut et il suffit que l'on ait, pour toutes les valeurs de

α, β, γ, δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \frac{dL}{dx} & \frac{dL}{dy} & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \frac{dM}{dx} & \frac{dM}{dy} & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \frac{dN}{dx} & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \end{vmatrix} = 0 \; (^*).$$

Le lieu cherché consiste donc dans le système des points communs à toutes les surfaces que peut représenter l'équation

$$\Delta = 0.$$

Or il est aisé de voir que toutes ces surfaces passent par une même courbe, et qu'il est en général impossible de définir celle-ci d'une manière précise avec moins de quatre équations. Considérons en effet les quatre surfaces

$$A = \frac{d\Delta}{d\alpha} = 0, \quad B = \frac{d\Delta}{d\beta} = 0, \quad C = \frac{d\Delta}{d\gamma} = 0, \quad D = \frac{d\Delta}{d\delta} = 0,$$

on a identiquement

$$A\frac{dL}{dx} + B\frac{dL}{dy} + C\frac{dL}{dz} + D\frac{dL}{dt} = 0;$$

$$A\frac{dM}{dx} + B\frac{dM}{dy} + C\frac{dM}{dz} + D\frac{dM}{dt} = 0,$$

$$A\frac{dN}{dx} + B\frac{dN}{dy} + C\frac{dN}{dz} + D\frac{dN}{dt} = 0.$$

Par suite les coordonnées de tout point situé sur deux d'entre elles

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

(*) Cela ne s'accorde pas avec le résultat (t. XVI, p. 268). Où gît l'erreur? Tm.

satisfont aux équations

$$C\frac{dL}{dz} + D\frac{dL}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dM}{dz} + D\frac{dM}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dN}{dz} + D\frac{dN}{dt} = 0.$$

Posant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha' & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \beta' & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \gamma' & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \end{vmatrix}$$

et

$$P = \frac{d\Delta'}{d\alpha'}, \quad Q = \frac{d\Delta'}{d\beta'}, \quad R = \frac{d\Delta'}{d\gamma'};$$

on tire de là

$$PC = 0, \quad QC = 0, \quad RC = 0,$$
$$PD = 0, \quad QD = 0, \quad RD = 0.$$

D'autre part les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

entraînent évidemment

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

sans entraîner

$$C = 0 \quad \text{et} \quad D = 0.$$

De là résulte que dans le système des points communs à A et à B, il faut distinguer, à côté des points situés aussi sur C et D, lesquels forment une courbe δ, les points communs P, Q, R. Ceux-ci forment eux-mêmes une courbe

δ' qui ne constitue en général l'intersection *complète* d'aucun *couple* de surfaces algébriques; car les identités

$$P\frac{dL}{dz}+Q\frac{dM}{dz}+R\frac{dN}{dz}=0,$$

$$P\frac{dL}{dt}+Q\frac{dM}{dt}+R\frac{dN}{dt}=0,$$

montrent que l'intersection complète de P et Q se compose, d'une part, de la courbe commune aux deux surfaces

$$\frac{dN}{dz}=0, \quad \text{et} \quad \frac{dN}{dt}=0,$$

et, d'autre part, d'une courbe δ' située sur R. L'intersection complète de A et B se compose donc de deux courbes : la courbe principale δ qui constitue le lieu cherché et une courbe auxiliaire δ'. Si l'on adjoignait aux deux surfaces A et B la surface $C=0$, laquelle ne contient pas δ', la courbe δ ne se trouverait pas encore entièrement définie, car parmi les points où δ' rencontre C, il en existe qui ne sont pas situés sur δ, à savoir les points communs aux trois surfaces

$$\frac{dL}{dt}=0, \quad \frac{dM}{dt}=0, \quad \frac{dN}{dt}=0.$$

La discussion qui précède permet d'établir immédiatement le nombre des points où la courbe δ est rencontrée par un plan, ou plus généralement par une surface algébrique de degré m, $F=0$. Pour cela, je remarque que les surfaces

$$A, \quad B, \quad P, \quad Q, \quad \frac{dN}{dz}, \quad \frac{dN}{dt}$$

ont respectivement pour degrés

$$\lambda+\mu+\nu, \quad \lambda+\mu+\nu, \quad \mu+\nu, \quad \nu+\lambda, \quad \nu, \quad \nu;$$

le nombre des points communs à F, A, B est donc $m(\lambda+\mu+\nu)^2$; il se compose des points d'intersection de F et δ et des points d'intersection de F et δ'; or ces derniers sont les points communs à F, P, Q, en exceptant les points communs à F, $\frac{dN}{dz}$, $\frac{dN}{dt}$, ils sont donc en nombre

$$m(\mu+\nu)(\nu+\lambda)-m\nu^2=m(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu),$$

et par suite le nombre cherché est

$$m[(\lambda+\mu+\nu)^2-\mu\nu-\nu\lambda-\lambda\mu]$$

ou

$$m(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu).$$

On peut ajouter que le nombre des points communs aux deux courbes δ et δ' est égal à

$$(\lambda+\mu+\nu)(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)-\lambda\mu\nu.$$

Si l'on joint à ces résultats le degré de la surface développable formée par les tangentes à la courbe δ, lequel peut s'établir par des considérations analogues un peu plus complexes, et que je trouve égal à

$$\begin{aligned}&2(\lambda+\mu+\nu-1)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\\&\quad-(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)(\lambda+\mu+\nu)+\lambda\mu\nu,\end{aligned}$$

on aura tous les éléments essentiels relatifs à cette courbe; car on en déduira par les formules de Steiner le degré et la classe des cônes qui ont cette courbe pour directrice; le nombre de leurs arêtes doubles, de leurs plans d'inflexion, de leurs plans doublement tangents, et par suite aussi le nombre des plans osculateurs que l'on peut mener à la courbe par un point quelconque, ou, ce qui revient au même, la classe de la surface développable formée par ses tangentes. La connaissance du nombre des points où la courbe δ est rencontrée par une surface algébrique, fournit la solution de la question suivante :

Dans le faisceau des surfaces représentées par l'équation

$$6M + \gamma N = 0,$$

où M *est de degré* $\mu + 1$, N *de degré* $\nu + 1$, *combien y en a-t-il qui soient tangentes à une surface donnée* L *de degré* $\lambda + 1$.

Il suit, en effet, des propriétés connues du plan harmonique, que les points de contact de L avec les diverses surfaces du faisceau qui lui sont tangentes sont situés sur la courbe δ relative aux trois surfaces L, M et N et que leur nombre est par conséquent égal à

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu).$$

D'ordinaire on suppose $\mu = \nu$, cette formule devient alors

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\mu^2),$$

et le résultat qu'elle exprime peut s'énoncer sous la forme suivante, utile à signaler :

L'équation de condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients des équations de deux surfaces algébriques l'une d'ordre $\lambda + 1$, *l'autre d'ordre* $\mu + 1$, *pour que ces deux surfaces soient tangentes entre elles, est de degré*

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\mu^2)$$

par rapport aux coefficients de la seconde, et de degré

$$(\mu + 1)(\mu^2 + 3\lambda\mu + 3\lambda^2)$$

par rapport aux coefficients de la première.

De là on déduit enfin que :

La surface enveloppe de toutes les surfaces de degré l *dont les coefficients sont des fonctions de degré* m *de* *trois paramètres arbitraires liés entre eux par une relation unique de degré* n *est en général d'un ordre marqué par*

$$ln[(n-1)^2+2(n-1)(m-1)+3(m-1)^2].$$

Ce théorème et son analogue de la fin du n° 1 sont susceptibles d'applications importantes dans la théorie des surfaces algébriques. Ils permettent entre autres d'obtenir immédiatement des résultats analogues à quelques-uns de ceux énoncés pour les courbes dans un Mémoire de M. Steiner présenté dans la séance des sections réunies de l'Académie de Berlin du 10 août 1848 (*Journal* de Liouville, t. XVIII, p 309). Je me bornerai à citer les deux suivants :

Lorsqu'un point O parcourt une surface de degré r, la surface polaire de degré $(m-p)$ du point O, par rapport à une surface donnée d'ordre m, est enveloppée par une surface de degré

$$(m-p)\,r[(r-1)^2+2(r-1)(p-1)+3(p-1)^2].$$

Lorsque le point O parcourt la courbe d'intersection de deux surfaces de degré r et r', la polaire de degré $m-p$ du point O, par rapport à une surface de degré m, est enveloppée par une surface de degré

$$(m-p)\,rr'(2p+r+r'-4).$$

En faisant

$$r'=1,$$

on trouve

$$(m-p)\,r(r+2p-3),$$

ce qui est le résultat donné par M. Steiner (p. 311 du Mémoire cité).