

DROUARD

Seconde solution des questions 483 et 484

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 54-58

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__54_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DES QUESTIONS 483 ET 484

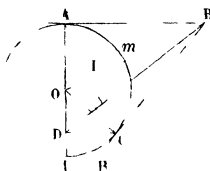
(voir t. XVIII, p. 357),

PAR M. DROUARD,
Élève du lycée Napoléon

Question 483.

D'un point B extérieur à une circonférence O, on mène deux tangentes BA et BC; on projette C en D sur le rayon OA et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA.

Le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au volume du tronc de cône à bases parallèles engendré par le trapèze rectangle ABCD, moins le



volume du segment sphérique engendré par CDA :

$$\text{vol. BAMC} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. CDAM.}$$

Soient

$$\text{BA} = a, \quad \text{CD} = b, \quad \text{OA} = r,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \text{volBAMC} &= \frac{\pi}{3} \times \text{AD}(a^2 + b^2 + ab) - \frac{\pi}{2} \times b^2 \times \text{AD} - \frac{\pi}{6} \times \overline{\text{AD}}^3 \\ &= \frac{\pi}{6} \times \text{AD} (2a^2 + 2ab - b^2 - \overline{\text{AD}}^2). \end{aligned}$$

Le volume engendré par le triangle BDA est un cône qui a pour mesure

$$\frac{\pi}{3} \times a^2 \cdot \text{AD},$$

il faut donc prouver que l'on a

$$\frac{\pi}{6} \times \text{AD} (2a^2 + 2ab - b^2 - \overline{\text{AD}}^2) = \frac{\pi}{3} \times \text{AD} \cdot a^2$$

ou

$$2ab - b^2 = \overline{\text{AD}}^2 = (r + \text{OD})^2.$$

Si nous menons OC, le triangle rectangle ODC donne

$$\text{OD} = \sqrt{r^2 - b^2};$$

nous aurons donc :

$$\begin{aligned} 2ab - b^2 &= r^2 + r^2 - b^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2}, \\ ab &= r^2 + r\sqrt{r^2 - b^2}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par un calcul facile,

$$b = \frac{2ar^2}{a^2 + r^2}.$$

Il suffit donc de démontrer l'existence de cette équation.

tion. A cet effet, joignons le point B au centre O, cette droite BO est bissectrice de l'angle ABC et est perpendiculaire sur le milieu de la droite AC puisque le triangle ABC est isocèle; soit I le point où BO coupe AC; désignant AI par x , le triangle rectangle OIA donne

$$\overline{OI}^2 = r^2 - x^2,$$

le triangle rectangle AIB

$$\overline{BI}^2 = a^2 - x^2.$$

Si nous faisons la somme de ces deux égalités et que nous augmentions de

$$2 \cdot OI \times BI = 2 \sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)}$$

chaque membre de l'égalité obtenue, nous aurons

$$\begin{aligned} & \overline{OI}^2 + 2 \overline{OI} \times BI + \overline{BI}^2 \\ &= r^2 - x^2 + a^2 - x^2 + 2 \sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)} = \overline{BO}^2 \end{aligned}$$

Or dans le triangle rectangle OBA, on a

$$\overline{OB}^2 = a^2 + r^2,$$

donc

$$\begin{aligned} a^2 + r^2 &= r^2 - 2x^2 + a^2 + 2 \sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)}, \\ x^2 &= \sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)}, \\ x^4 &= (r^2 - x^2)(a^2 - x^2), \\ x^2(a^2 + r^2) &= a^2 r^2, \\ x^2 &= \frac{a^2 r^2}{a^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Les triangles AIO, ADC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et que l'angle A leur est commun. Or a

donc

$$\begin{aligned} \frac{b}{OI} &= \frac{AC}{r}, \\ b &= \frac{AC \times OI}{r} = \frac{2x\sqrt{r^2 - x^2}}{r}, \\ b &= \frac{2ar}{\sqrt{a^2 + r^2}} \sqrt{\frac{r^2(a^2 + r^2) - a^2r^2}{a^2 + r^2}}, \\ &= \frac{2ar\sqrt{r^2(a^2 + r^2) - a^2r^2}}{r(a^2 + r^2)}, \\ b &= \frac{2ar^2}{a^2 + r^2}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Question 484.

La même figure étant faite que précédemment et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

Le volume engendré par le triangle CBD est équivalent au volume engendré par le trapèze ABCD, moins le volume engendré par le triangle BDA. Il faut donc prouver que

$$\text{vol. CDA} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. BDA}.$$

$$\frac{\pi \cdot b^2}{2} \times AD + \frac{\pi}{6} \times \overline{AD}^3 = \frac{\pi}{3} \times AD (a^2 + b^2 + ab) - \frac{\pi}{3} \times AD a^2,$$

$$3b^2 + \overline{AD}^2 = (a^2 + b^2 + ab) - 2a^2,$$

$$\overline{AD} = 2ab - b^2,$$

$$(r + OD)^2 = 2ab - b^2,$$

$$r^2 + r^2 - b^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2} = 2ab - b^2,$$

$$r\sqrt{r^2 - b^2} = ab - r^2,$$

$$r^4 - a^2b^2 = a^2b^2 + r^4 - 2abr^2,$$

$$b^2(a^2 + r^2) = 2abr^2,$$

$$b = \frac{2ar^2}{a^2 + r^2},$$

ce que nous avons prouvé plus haut.

Note. MM. Henri Delorme, élève du lycée Louis-le-Grand, Charles Kessler, élève du Prytanée Militaire, et Puech, élève du lycée de Castres, ont résolu ces deux questions de la même manière.
