NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINK

Mouvement du pendule

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 449-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__449_0>

MOUVEMENT DU PENDULE;

PAR M. FINK,
Professeur à Strasbourg.

M. Delaunay a traité dans sa *Mécanique* entre autres deux questions intéressantes, à savoir : la déviation des corps graves vers l'est, déviation due au mouvement de rotation de la terre combinée avec l'action de la pesanteur dans la chute verticale, et le déplacement du plan d'oscillation du pendule due au même mouvement de rotation. Ce savant emploie à cet effet la théorie du mouvement relatif. Je me propose de résoudre les mêmes questions sans ce secours; on verra qu'en négligeant le carré et les puissances supérieures de la vitesse angulaire de la terre, mes résultats coïncident avec les siens.

Déviation. Je prends trois axes fixes dans l'espace : l'axe Oz sera dirigé sur celui de la terre, du centre au pôle nord; l'axe Ox aura la position initiale de la trace du plan méridien du lieu sur l'équateur; l'axe Oy est perpendiculaire aux deux autres. Soient A la position initiale du lieu ou de l'observateur, R sa latitude, a le rayon terrestre, ω la vitesse angulaire de la terre; au bout du temps t, compté de l'instant où le point matériel commence à tomber, les coordonnées de ce lieu seront

$$(1)\quad x_1 = a\cos\lambda\cos\omega t,\quad y_1 = a\cos\lambda\sin\omega t,\quad z_1 = a\sin\lambda;$$

l'équation du plan tangent au globe en ce point, c'est-à-dire du plan horizontal de l'observateur, est, au temps t,

$$(2)\quad x\cos\lambda\cos\omega t + y\cos\lambda\sin\omega t + z\sin\lambda - a = 0.$$

Je nomme b la distance initiale du mobile au centre de la terre, de sorte que $b - a$ est la hauteur d'où il tombe ; ses coordonnées initiales sont

$$(3) \qquad x_0 = b\cos\lambda, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = b\sin\lambda.$$

La vitesse initiale du mobile, perpendiculaire au plan xz, est $b\omega\cos\lambda$; ses composantes parallèles aux x, y, z sont respectivement

$$(4) \qquad 0, \quad b\omega\cos\lambda, \quad 0.$$

La pesanteur g étant dirigée sur la verticale de l'observateur, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\cos\lambda\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\lambda\sin\omega t,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\lambda.$$

Ayant égard à (4) on trouve, au moyen d'une première intégration,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{\omega}\cos\lambda\sin\omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{\omega}\cos\lambda(\cos\omega t - 1) + b\omega\cos\lambda,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt\sin\lambda.$$

La position initiale du mobile a pour coordonnées (3), donc

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{g}{\omega^2}\cos\lambda(\cos\omega t - 1) + b\cos\lambda, \\ y &= \cos\lambda\left[\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + \left(b\omega - \frac{g}{\omega}\right)\right]t, \\ z &= \sin\lambda\left(b - \frac{1}{2}gt^2\right). \end{aligned} \right.$$

Pour avoir l'époque de la chute sur le plan horizontal de l'observateur, il faut substituer pour x, y, z, ces expressions dans l'équation (2), puis la résoudre par rapport à t.

Or ω étant égal à

$$\frac{2\pi}{86164''} = 0,000\,0729,$$

on pourra développer les $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ suivant les puissances de ωt, et comme la durée du mouvement de chute se réduit à quelques secondes, on négligera ω^2, ω^4, etc. On trouve

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \cos\lambda \left[b - g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\omega^2 t^4}{2.3\,4} + \ldots\right)\right] \\ \quad \text{ou} \\ x = \cos\lambda \left(b - \frac{1}{2} g t^2\right), \\ y = \cos\lambda \left(b\omega t - \frac{gt}{\omega} + \frac{gt}{\omega} - \frac{g\omega t^3}{2.3} + \frac{g\omega^3 t^5}{2.3.4}\right) \\ \quad \text{ou} \\ y = \cos\lambda \left(b - \frac{gt^2}{6}\right)\omega t, \\ z = \sin\lambda \left(b - \frac{1}{2} g t^2\right). \end{array} \right.$$

Dans (2), je remplace également $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ par les séries, et x, y, z par les valeurs précédentes; je supprime $\omega^2 t^2, \ldots$ et j'ai

$$(7)\qquad b - a - \frac{1}{2} g t^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2(b-a)}{g}},$$

comme si la terre ne tournait pas.

La déviation est la distance du point de chute représenté par (6) et (7) au point x_1, y_1, z_1. Avec l'approximation adoptée, on trouve pour le carré de cette distance, avant d'avoir égard à (7),

$$\left(b - a - \frac{1}{2} g t^2\right)^2 + \omega^2 t^2 \left(b - a - \frac{1}{6} g t^2\right)^2 \cos^2\lambda.$$

Le premier terme est nul en vertu de (7), et la déviation *tout entière* à l'est (vu que $x - x_1 = 0$)

$$\omega t \cos\lambda \left(b - a - \frac{1}{6} g t^2\right).$$

Avec la valeur de t (équation 7), elle se transforme en

$$(8) \qquad \frac{1}{3} g \omega \cos\lambda \left[\frac{2(b-a)}{g}\right]^{\frac{3}{2}}$$

que je nomme u, comme dans l'ouvrage cité. Dans les expériences que l'auteur cite, on avait

$b - a = 158^{\text{m}},5$, $\lambda = 51°$, $g = 9,8088$ et $u = 0,0283$;

le calcul de la formule (8) donne

$$u = 0,0276,$$

Pendule. Je conserve les mêmes axes de coordonnées et j'appelle x_1, y_1, z_1 le point de suspension du pendule simple, l sa longueur, N la réaction du fil de suspension, $-x$, y, z les coordonnées du point matériel; sa masse est supposée $= 1$. Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g\cos\lambda\cos\omega t - \mathrm{N}\frac{(x - x_1)}{l}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g\cos\lambda\sin\omega t - \mathrm{N}\frac{y - y_1}{l}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g\sin\lambda - \mathrm{N}\frac{z - z_1}{l}. \end{aligned}\right.$$

Comme plus haut, on a ici

$$(2) \quad x_1 = a\cos\lambda\cos\omega t, \quad y_1 = a\cos\lambda\sin\omega t, \quad z_1 = a\sin\lambda.$$

Par le point x, y, z, j'imagine un second système d'axes de coordonnées fixes dans la terre, à savoir : la verticale du lieu axe des ζ, la méridienne axe des ξ, et la perpendiculaire axe des η. On aura

$$(3)\quad \begin{cases} x = x_1 + \xi\cos\xi x + \eta\cos\eta x + \zeta\cos\zeta x, \\ y = y_1 + \xi\cos\xi y + \ldots, \\ z = z_1 + \xi\cos\xi z\ldots \end{cases}$$

L'axe des ζ, c'est-à-dire la verticale, donne immédiatement, au temps t,

$$\cos\zeta x = \cos\lambda\cos\omega t,\quad \cos\zeta y = \cos\lambda\sin\omega t,\quad \cos\zeta\xi = \sin\lambda.$$

L'axe des η, perpendiculaire au plan méridien qui fait avec le plan xz l'angle ωt, donne

$$\cos\eta x = -\sin\omega t,\quad \cos\eta y = \cos\omega t,\quad \cos\eta z = 0.$$

Quant à l'axe des ξ, il fait avec l'axe z un angle de

$$90 + 90 - \lambda,\quad \text{d'où}\quad \cos\xi z = -\cos\lambda.$$

Il est de plus perpendiculaire à l'axe ζ, ce qui donne

$$\cos\xi x\cos\zeta x + \cos\xi y\cos\zeta y + \cos\xi z\cos\zeta z = 0,$$

ou, à cause des valeurs déjà données,

$$(5)\quad \cos\xi x\cos\lambda\cos\omega t + \cos\xi y\cos\lambda\sin\omega t - \cos\lambda\sin\lambda = 0.$$

Avec $\cos^2\xi x + \cos^2\xi y + \cos^2\xi z = 1$ et comme $\cos\xi z$ égale $-\cos\lambda$,

$$\cos^2\xi x + \cos^2\xi y + \cos^2\lambda = 1.$$

Cette équation avec (5) donne

$$\cos\xi x = \sin\lambda\cos\omega t,\quad \cos\xi y = \sin\lambda\sin\omega t,$$

et les formules (3) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} x = x_1 + \xi\sin\lambda\cos\omega t - \eta\sin\omega t + \zeta\cos\lambda\cos\omega t, \\ y = y_1 + \xi\sin\lambda\sin\omega t + \eta\cos\omega t + \zeta\cos\lambda\sin\omega t, \\ z = z_1 - \xi\cos\lambda + \zeta\sin\lambda. \end{cases}$$

Les équations (1), multipliées respectivement par $z_1 y - y_1 z$, $x_1 z - z_1 x$, $y_1 x - x_1 y$ donnent, par addition,

$$(7)\quad (z_1 y - y_1 z) d^2x + (x_1 z - z_1 x) d^2y + (y_1 x - x_1 y) d^2z = 0.$$

On va remplacer toutes les quantités qui y entrent par des fonctions de ξ_1, $m\zeta_1$, ωt.

D'abord les équations (3) et (2) fournissent

$$\begin{aligned} z_1 y - y_1 z &= a(\xi \sin\omega t + \eta \sin\lambda \cos\omega t), \\ x_1 z - z_1 x &= a(-\xi \cos\omega t + \eta \sin\lambda \sin\omega t), \\ y_1 x - x_1 y &= -a\eta \cos\lambda. \end{aligned}$$

Avec cela l'équation (7) peut être mise sous la forme suivante

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\xi(\sin\omega t\, d^2x - \cos\omega t\, d^2y) \\ &+ \eta(\sin\lambda \cos\omega t\, d^2x + \sin\lambda \sin\omega t\, d^2y) - \cos\lambda\, d^2z = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les coefficients de ξ et η, je multiplie la première des équations (6) par $\sin\omega t$, la deuxième par $-\cos\omega t$, j'ajoute et j'ai

$$(9)\quad x \sin\omega t - y \cos\omega t = -\eta.$$

Je multiplie les mêmes équations par $\sin\lambda \cos\omega t$, $\sin\lambda \sin\omega t$, la troisième par $-\cos\lambda$, j'ajoute et il vient

$$(10)\quad \sin\lambda(x \cos\omega t + y \sin\omega t) - z \cos\lambda = \xi.$$

L'équation (9), différentiée deux fois, donne

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin\omega t\, d^2x - \cos\omega t\, d^2y \\ &= -d^2\eta - 2\omega dt(\cos\omega t\, dx + \sin\omega t\, dy) \\ &\quad + \omega^2 dt^2 (x \sin\omega t + y \cos\omega t), \end{aligned} \right.$$

d'après l'équation (9) le dernier terme $= -\omega^2 \eta\, dt^2$.

L'équation (10), différentiée deux fois, donne

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin\lambda(\cos\omega t . d^2x + \sin\omega t\, d^2y) - \cos\lambda\, d^2z = d^2\xi \\ &+ 2\omega \sin\lambda\, dt(\sin\omega t\, dx - \cos\omega t\, dy) \\ &+ \omega^2 dt^2 \sin\lambda(x \cos\omega t + y \sin\omega t). \end{aligned} \right.$$

Le dernier terme, en vertu de l'équation (10), se réduit à $\omega^2\, dt^2\, (\xi + z\cos\lambda)$, et d'après l'équation (10), à $\omega^2\, dt^2 \sin\lambda\, [\xi \sin\lambda + (a+\zeta)\cos\lambda]$.

Restent les facteurs de $2\,\omega\, dt$.

Or de l'équation (9) on tire

$$\sin\omega t.dx - \cos\omega t.dy = -d\eta - \omega\, dt(x\cos\omega t + y\sin\omega t),$$

et d'après l'équation (10)

$$\sin\omega t.dx - \cos\omega t.dy = d\eta - \frac{\omega\, dt}{\sin\lambda}(\xi + z\cos\lambda),$$

d'après l'équation (6)

$$(13)\ \sin\omega t.dx - \cos\omega t.dy = -d\eta - \omega\, dt[\xi\sin\lambda + (a+z)\cos\lambda].$$

De l'équation (10) on déduit

$$\begin{aligned} \cos\omega t.dx + \sin\omega t\, dy &= \frac{d\xi + \cos\lambda\, dz}{\sin\lambda} \\ &\quad + \omega\, dt(x\sin\omega t - y\cos\omega t) \\ &= \sin\lambda.d\xi + \cos\lambda\, d\zeta - \omega\eta\, dt. \end{aligned}$$

Cette valeur, ainsi que les équations (11) (12) (13), subtituées dans l'équation (8), donnent

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\xi[-d^2\eta - 2\,\omega\, dt\,(\sin\lambda\, d\xi + \cos\lambda\, d\zeta - \omega\eta\, dt) - \omega^2\eta\, dt^2] \\ &+\eta\left\{d^2\xi + 2\,\omega\, dt\sin\lambda\,(-d\eta - \omega\, dt[\xi\sin\lambda + (a+\zeta)\cos\lambda])\right\} \\ &+\omega^2\sin\lambda\, dt^2[2a + \zeta(\cos\lambda + \xi\sin\lambda)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Effectuant, etc.,

$$\begin{aligned} 0 = \eta d^2\xi - \xi d^2\eta - 2\,\omega\sin\lambda\,(\xi d\xi + \eta d\eta)\, dt - 2\,\omega\cos\lambda.d\zeta dt \\ + \omega^2\eta\cos\lambda\, dt^2[\xi\cos\lambda + (a+\zeta)\sin\lambda]. \end{aligned}$$

En négligeant le terme en ω^2, de même que $\frac{d\zeta}{dt}$ qui est très-petit dans les expériences, on a une équation dont l'intégrale est

$$\xi d\eta - \eta d\xi + \omega \sin\lambda\,(d\xi^2 + d\eta^2) = C.$$

Observant de plus, encore avec M. Delaunay, que le pendule Foucault est installé de façon que pendant chaque oscillation il revienne coïncider avec la verticale du point de suspension, on voit que l'équation doit être satisfaite par $\xi = 0$ avec $\eta = 0$, de sorte que la constante est nulle. On posera ensuite, si on veut, $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$, et l'équation devient

$$d\theta = -\omega \sin\lambda\, dt,$$

d'où

$$\theta = \theta_0 - \omega \sin\lambda \times t,$$

ce qui donne $\omega \sin\lambda$ pour la rotation relative du plan du pendule en 1 seconde.

Ces calculs se simplifient beaucoup si dès le commencement on néglige ω^2,.... En ne remontant qu'à l'équation (8), on voit que cette équation devient

$$\xi(\omega t d^2x - d^2y) + \eta(\sin\lambda\, d^2x + \omega t \sin\lambda\, d^2y - \cos\lambda\, d^2z) = 0.$$

Les équations (6) donnent $\omega t x - y = -\eta$,

$$(a) \qquad (x + \omega t y)\sin\lambda - \zeta\cos\lambda = \xi,$$

d'où

$$\omega t d^2x - d^2y = -d^2z - 2\omega\, dx\, dt,$$

$$(d^2x + \omega t d^2y)\sin\lambda - \cos\lambda . d^2z = d^2\xi - 2\omega \sin\lambda\, dt dy\ .$$

Ces mêmes formules (a) donneront dx, dy, dans les expressions desquels on pourra supprimer les termes en ω, puisqu'on multipliera par $2\omega dt$. On aura ainsi

$$dy = d\eta, \quad dx = \frac{d\xi + \cos\lambda\, dz dz}{\sin\lambda} = \cos\lambda\, d\zeta + \sin\lambda . d\xi,$$

et l'équation (14) devient

$$\xi[-d^2\eta - 2\omega\, dt(\sin\lambda\, d\xi + \cos\lambda\, d\zeta)]$$
$$+\eta\,[d^2\xi - 2\omega\sin\lambda\, d\eta\, dt] = 0$$

ou

$$xd^2\xi - \xi d^2\eta - 2\omega\sin\lambda\, dt\,(\xi d\xi + \eta d\eta) - 2\omega\cos\lambda\,.\,dz\,dt = 0.$$