HOUSEL

Démonstration du théorème III de M. Nagel (voir p. 854)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 438-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__438_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III DE M. NAGEL

(voir p 354);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Lemme. Si l'on divise en parties égales les angles d'un triangle, ainsi que les suppléments de ces angles, pour avoir le centre du cercle inscrit et ceux des cercles ex-inscrits, ces bissectrices étant évidemment perpendiculaires deux à deux, on sait que le triangle formé par les trois derniers centres a pour hauteurs les bissectrices intérieures; de là résulte le théorème connu:

Les hauteurs d'un triangle sont bissectrices du triangle formé en réunissant les pieds de ces hauteurs.

THÉORÈME. *Dans un triangle, les lignes qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux rayons qui joignent les sommets avec le centre du cercle circonscrit.*

(*) Retourné à Bordeaux TM.

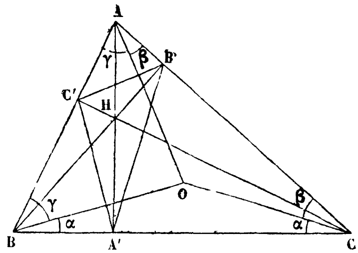
Pour le faire voir, soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et représentons respectivement par α, β, γ les angles à la base dans les triangles BOC, AOC, AOB, ce qui donne

$$A = \beta + \gamma, \quad B = \alpha + \gamma, \quad C = \alpha + \beta$$

et

$$\alpha = 90^\circ - A, \quad \beta = 90^\circ - B, \quad \gamma = 90^\circ - C.$$

Maintenant, soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs



correspondant aux sommets A, B, C, nous savons qu'une hauteur AA′ est bissectrice de l'angle A′, et CC′ de l'angle C′.

Soit H le point de concours de ces hauteurs, et considérons le quadrilatère BA′HC′ dans lequel les angles opposés en A′ et en C′ sont droits; donc $A'HC' = 180 - B$.

Mais d'après le lemme, nous savons que dans le triangle A′HC′ la droite HA′ est bissectrice de l'angle A′ du triangle B′A′C′; de même HC′ est bissectrice de l'angle C′.

Donc, dans le triangle où l'angle $A'HC' = A + C$,

$$\frac{A'}{2} + \frac{C'}{2} + A + C = 180,$$

d'où

$$\frac{A'}{2} + \frac{C'}{2} = B.$$

On aura de même

$$\frac{A'}{2} + \frac{B'}{2} = C, \quad \frac{B'}{2} + \frac{C'}{2} = A,$$

$$B' + C' = 2A = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - A';$$

par conséquent

$$\frac{A'}{2} = \alpha, \quad \frac{B'}{2} = \beta, \quad \frac{C'}{2} = \gamma.$$

Ainsi nous voyons que les angles $OBC = \alpha$ et $C'A'H' = \frac{A'}{2}$ sont égaux; mais déjà le côté BC de l'un de ces angles est perpendiculaire au côté HA' de l'autre angle : donc leurs côtés OB et $C'A'$ sont aussi perpendiculaires; on verrait de même que $B'C'$ et $B'A'$ sont respectivement perpendiculaires à OA et à OC. C. Q. F. D.

Il est facile de reconnaître que ce qui précède revient au théorème III de M. Nagel. En effet, le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$ est, comme on le voit, celui du cercle des neuf points par rapport à ABC; donc, par un théorème connu, ce point est au milieu de la droite OH. A, B, C sont les centres extérieurs des cercles qui touchent les côtés du triangle $A'B'C'$.

Note. Dans le théorème I, il faut lire contacts extérieurs et non intérieurs. TM.