

CHARLES KESSLER

## Solution de la question 542

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 434-435

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_434\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__434_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTION DE LA QUESTION 542

(voir p. 361);

PAR M. CHARLES KESSLER.

---

**THÉORÈME.** *Supposons que  $z^2$  puisse se décomposer de  $n$  manières en produits de facteurs inégaux (1.  $z^2$  compris); démontrer que  $4z^2$  peut se décomposer de  $n$  manières, et pas davantage, en différence de deux carrés entiers.*

*Démonstration.* Supposons

$$z^2 = pq,$$

$p, q$  étant deux quantités différentes entre elles; on pourra toujours trouver deux quantités et deux quan-

*tités seulement* telles, que

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad q = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

d'où

$$pq = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}.$$

Ceci apprend déjà que tout carré est la différence de deux autres carrés, et d'autant de manières qu'il peut se décomposer en produit de facteurs inégaux. De là on tire

$$4z^2 = 4pq = \alpha^2 - \beta^2$$

( $\alpha$  et  $\beta$  sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

Des quantités  $\alpha$ ,  $\beta$  étant déterminées et uniques pour chaque système de valeurs de  $p$  et  $q$ , la proposition est démontrée. Elle s'étend en outre évidemment à tout nombre qui n'est pas premier et peut se formuler :

Supposons que  $k$  non premier puisse se décomposer de  $n$  manières en produits de facteurs inégaux ( $1.k$ ) compris,  $z^{2n}k$  peut se décomposer de  $n$  manières au moins en différence de deux carrés entiers : du reste, tout nombre est la différence de deux carrés.

Il est facile de montrer plus clairement que le nombre de manières dont  $4z^2$  peut se décomposer en différence de deux carrés entiers, ne surpasse pas celui dont  $z^2$  se décompose en produits de deux facteurs inégaux. Si, en effet, il en existe une autre

$$4z^2 = m^2 - n^2,$$

d'où

$$z^2 = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2},$$

$z^2$  se décompose en produits de deux facteurs inégaux, et par hypothèse on a considéré toutes les manières dont cela arrive.