

FAURE

**Note sur les polygones réguliers sphériques
et solution de la question 153 (Strebor)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 421-430

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__421_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES POLYGOUES RÉGULIERS SPHÉRIQUES
ET SOLUTION DE LA QUESTION 153 (Strebör)**

(voir t. VI, p. 242);

PAR M. FAURE.

Si l'on appelle a, b, c les côtés d'un triangle sphérique,
 C l'angle opposé au côté c , on a la relation

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} c &= \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \\ &\quad - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{1}{2} c &= \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \\ &\quad + 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos C. \end{aligned}$$

Legendre, dans les précieuses Notes de sa *Trigonométrie*, développe la valeur de $\sin \frac{1}{2} c$ et $\cos \frac{1}{2} c$ en série, et trouve (les logarithmes sont hyperboliques)

$$\log \sin \frac{1}{2} c = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \right) - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \cos c$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \cos 2c - \dots,$$

$$\log \cos \frac{1}{2} c = \log \left(\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \right) + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} \cos c$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{2 \cot^2 \frac{1}{2} a} \cos 2c + \dots,$$

et ayant de telles séries, on peut repasser aux équations finies d'où elles proviennent; observation essentielle pour ce qui suit.

Legendre montre aussi que la valeur de x , que l'on tire de l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{m+n}{m-n} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$$

peut s'exprimer par cette série

$$x = \frac{1}{2} C + \frac{n}{m} \sin C + \frac{n^2}{2 m^2} \sin 2 C + \frac{n^3}{3 m^3} \sin 3 C + \dots$$

Où, les analogies de Neper donnent, A et B étant les

deux autres angles du triangle sphérique,

$$\begin{aligned} \cot \frac{A - B}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} b} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C, \\ \cot \frac{A + B}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C \\ &= \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C, \end{aligned}$$

donc, en vertu de la formule précédente,

$$\begin{aligned} \frac{A - B}{2} &= \frac{\pi - C}{2} - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \sin 2C \\ &\quad - \frac{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} b}{3 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a} \sin 3C - \dots, \\ \frac{A + B}{2} &= \frac{\pi - C}{2} + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{2 \cot^2 \frac{1}{2} a} \sin 2C \\ &\quad + \frac{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} b}{3 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a} \sin 3C - \dots \end{aligned}$$

Si l'on fait la somme de ces deux valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}
 A = \pi - C + & \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \right) \sin C \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{\cot^2 \frac{1}{2} a} + \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \right) \sin 2 C \\
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} b}{\cot^3 \frac{1}{2} a} - \frac{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a} \right) \sin 3 C - \dots
 \end{aligned}$$

On peut donc regarder cette expression comme étant le développement de la valeur de A donnée par la relation

$$\cot A = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b \right) \cos C}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b \right) \sin C};$$

car

$$\cot A = \cot \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right).$$

Développant et substituant les valeurs ci-dessus, on obtient cette dernière relation qui n'est que la transformation de

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin b \cot A.$$

Ces principes établis, proposons-nous de trouver en coordonnées polaires sphériques le lieu d'un point P sur la surface d'une sphère, tel que si de là on mène des arcs de grands cercles aux sommets P_1, P_2, \dots, P_n , d'un po-

lygone régulier sphérique inscrit dans un petit cercle donné, 1° le produit des sinus des demi-arcs PP_1, PP_2, \dots, PP_n soit constant; 2° et 3° le produit des cosinus ou des tangentes des mêmes demi-arcs soit constant; 4° la somme des angles $PP_1P_2, PP_2P_3, \dots, PP_nP_1$ soit constante (*).

1°. Prenons le centre O du petit cercle pour pôle, et le grand cercle OP_1 pour axe polaire. Soient $OP = \rho$; $POP_1 = \omega$ les coordonnées d'un point P du lieu cherché. Désignons aussi par $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ les distances sphériques du point P aux différents sommets P_1, P_2, \dots, P_n du polygone, on a par hypothèse

$$\sin \frac{1}{2} \rho_1 \sin \frac{1}{2} \rho_2, \dots, \sin \frac{1}{2} \rho_n = \sin^n \frac{1}{2} k.$$

k indiquant une constante quelconque. Formant les triangles $OPP_1, OPP_2, \dots, OPP_n$, on trouve de suite, a étant le rayon sphérique du petit cercle,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} \rho_1 &= \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \cos \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} \rho_2 &= \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} \rho_n &= \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right); \end{aligned}$$

(*) Ce 4° seul est le sujet de la question.

on déduit donc de là

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_1 = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right) - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \cos \omega$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \cos 2\omega - \dots,$$

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_2 = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right) - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \cos 2 \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) - \dots,$$

.....

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_n = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right)$$

$$- \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} \cos 2 \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) - \dots$$

Ajoutons ces résultats :

$$\log \sin^n \frac{1}{2} k = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right)^n - \frac{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho}{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a} \cos n\omega$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho}{2 \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a} \cos 2n\omega - \dots$$

On voit en effet facilement, en ayant égard à la valeur de la somme

$$\cos m\omega + \cos m\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) \dots + \cos m\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

que cette somme est nulle toutes les fois que m n'est pas un multiple de n , et lorsque le contraire a lieu, cette somme est égale à $n \sin m\omega$.

La valeur que nous venons de trouver pour $\log \sin \frac{1}{2} k$ donne en passant aux nombres (p. 421 et 422)

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{n}{2} k &= \sin^{2n} \frac{1}{2} a \cos^{2n} \frac{1}{2} \rho + \cos^{2n} \frac{1}{2} a \sin^{2n} \frac{1}{2} \rho \\ &\quad - 2 \sin^n \frac{1}{2} a \cos^n \frac{1}{2} a \sin^n \frac{1}{2} \rho \cos^n \frac{1}{2} \cos n\omega, \end{aligned}$$

équation du lieu.

2^o. Mêmes notations. On a par hypothèse

$$\cos \frac{1}{2} \rho_1 \cos \frac{1}{2} \rho_2 \dots \cos \frac{1}{2} \rho_n = \cos^n \frac{1}{2} k.$$

Or

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{1}{2} \rho_1 &= \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad + 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho \cos \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{1}{2} \rho_2 &= \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad + 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{1}{2} \rho_n &= \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho \\ &\quad + 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho \\ &\quad \times \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Ajoutant et ayant égard à la remarque précédente, on obtient

$$\log \cos^n \frac{1}{2} k = \log \left(\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right)^n \pm \frac{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho}{\cot^n \frac{1}{2} a} \cos n \omega$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho}{2 \cot^{2n} \frac{1}{2} a} \cos 2 n \omega \pm \dots;$$

le signe supérieur si n est impair, et l'inférieur si n est pair. Passant des logarithmes aux nombres, on a

$$\cos^{2n} \frac{1}{2} k = \cos^{2n} \frac{1}{2} a \cos^n \frac{1}{2} \rho + \sin^n \frac{1}{2} a \sin^{2n} \frac{1}{2} \rho$$

$$\pm 2 \sin^n \frac{1}{2} a \cos^n \frac{1}{2} a \sin^n \frac{1}{2} \rho \cos^n \frac{1}{2} \rho \cos n \omega,$$

équation du lieu.

3°. Si enfin on donnait le produit des tangentes des demi-axes $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, égal à $\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} k$, on se servira des formules précédentes pour avoir

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho_1, \dots, \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho_n$$

et l'on arrive à la relation

$$\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} k = \frac{\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a + \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho + 2 \operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho \cos n \omega}{1 + \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho \pm 2 \operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho \cos n \omega},$$

selon que n est impair ou pair.

4°. Relativement à la dernière question, j'appellerai A le demi-angle formé par deux côtés consécutifs du polygone régulier, P_1, P_2, \dots, P_n , les angles $PP_1P_2, PP_2P_3, \dots, PP_nP_1$, et j'y pose

$$A - P_1 = \omega, \quad A - P_2 = \omega, \dots, \quad A - P_n = \omega_n;$$

on aura par suite

$$nA - (P_1 + P_2 \dots + P_n) = \omega_1 + \omega_2 \dots \omega_n = n k.$$

Les triangles $OPP_1, OPP_2, \dots, OPP_n$ donnent

$$\cot \omega_1 = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho \right) - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \cos \omega}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \sin \omega},$$

$$\cot \omega_2 = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho \right) - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \sin \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)},$$

$$\operatorname{tang} \omega_n = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho \right) - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \cos \left[\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right]}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \right) \sin \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)},$$

d'où (p. 423)

$$\omega_1 = \pi - \omega + \sin \omega \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\cot \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho} \right)$$

$$- \sin 2\omega \left(\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \cot^2 \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho} \right) + \dots$$

$$\omega_2 = \pi - \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\cot \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho} \right)$$

$$- \sin 2 \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) \left(\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \cot^2 \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho} \right) + \dots,$$

.....

$$\begin{aligned} \omega_n = & \pi - \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \\ & + \sin \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\cot \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho} \right) \\ & - \sin 2 \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \left(\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \cot^2 \frac{1}{2} \rho} + \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho} \right) + \dots \end{aligned}$$

Ajoutant et remarquant aussi que la somme

$$\sin m \omega + \sin m \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \sin m \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

est nulle lorsque m n'est pas divisible par n , et devient égale à $n \sin m \omega$ dans le cas contraire, on trouvera

$$\begin{aligned} nk = & \pi - n \omega \pm \sin n \omega \left(\frac{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a}{\cot^n \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho} \right) \\ & - \sin 2 n \omega \left(\frac{\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a}{2 \cot^{2n} \frac{1}{2} \rho} - \frac{\operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho} \right) \pm \dots \end{aligned}$$

On prendra le signe supérieur lorsque n sera impair, et l'inférieur pour n pair. A l'inspection seule de cette relation, on déduit pour l'équation du lieu cherché

$$\cot nk = \frac{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} a \left(1 \mp \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} \rho \right) - \operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho \left(1 \mp \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a \right) \cos n \omega}{\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \rho \left(1 \pm \operatorname{tang}^{2n} \frac{1}{2} a \right) \sin n \omega}.$$