J. DE VIRIEU

Solution de la question 507

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 397-398
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__397_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 507

(voir p. 48);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

---

x étant une variable positive entière qui peut être nulle, u_x une fonction de cette variable, n un nombre entier absolu, on a

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} u_{x+n-k} = \Delta^n u_x.$$

Posons $u_x = x(x+1)\ldots(x+p-1)$, où p est un entier absolu non nul, $\Delta x = 1$,

$$\Delta^n u^x = \begin{cases} \dfrac{n!}{(p-n)!}(x+n)(x+n+1)\ldots(x+p-1), & \text{si } n<p, \\ p!, & \text{si } n=p, \\ 0 & \text{si } n>p. \end{cases}$$

L'équation (1) devient, en y supposant $x=0$, divisant les deux membres par $p!$ et remarquant que le dernier terme du premier membre devient nul,

$$(2) \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{1} \frac{n-k+1}{2} \cdots \frac{n-k+p-1}{p} \\ = \begin{cases} \dfrac{n}{1}\dfrac{n+1}{2}\cdots\dfrac{p-1}{p-n}, & \text{si } n<p, \\ 1, & \text{si } n=p, \\ 0, & \text{si } n>p. \end{cases} \end{cases}$$

Désignons par n'_k le nombre des combinaisons de n éléments pris k à k sans répétition; par $(n-k)'_p$ le nombre des combinaisons de $n-k$ éléments pris p à p avec répétition; on a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=n_k\,\frac{(n-k)}{1}\,\frac{n-k+1}{2}\cdots\cdots\frac{n-k+p-1}{p}=(n-k)'_p$$

et

$$(p-1)_{n-1}=\begin{cases}\dfrac{n}{1}\,\dfrac{n+1}{2}\cdots\dfrac{p+1}{p-n}, & \text{si } p>n,\\ 1, & \text{si } p=n,\\ 0, & \text{si } p<n.\end{cases}$$

Donc on a en général

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\,n_k(n-k)'_p=(p-1)_{n-1},$$

formule qui montre qu'il s'est glissé une faute d'impression dans le second membre de la proposée où il faut remplacer n par p, p par n.