

Solution de la question 416

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19 (1860), p. 38-42

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__38_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 416

(voir tome XVII, page 31).

Le produit de cinq ou de six nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

Je ferai d'abord quelques remarques sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$(1) \quad x(x+1)(x+2) \dots (x+n) = y^2.$$

1. Tout *diviseur commun* à deux quelconques des nombres entiers $x, (x+1), (x+2), \dots, (x+n)$, devant diviser leur différence, est nécessairement l'un des nombres $1, 2, 3, 4, \dots, n$. Par conséquent, tout *diviseur premier commun* à deux quelconques des nombres entiers $x, (x+1), (x+2), \dots, (x+n)$, est nécessairement l'un des nombres premiers $2, 3, 5, \dots, p$, en désignant par p le plus grand des nombres premiers compris dans la suite $1, 2, 3, 4, \dots, n$.

Que si le produit $x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$ est un carré exact, comme le suppose l'équation (1), et qu'en outre l'exposant de la plus haute puissance d'un nombre premier divisant l'un de ses facteurs soit impaire, ce nombre premier appartiendra à la suite $2, 3, 5, \dots, p$, car il devra diviser au moins deux des facteurs du produit; et de là je conclus que :

1°. Si un facteur du produit $x(x+1)\dots(x+n)$ n'est divisible par aucun des nombres $2, 3, 5, \dots, p$, il sera, par cela même, un carré exact.

2°. Si un facteur de ce produit n'admet comme diviseur qu'un seul des nombres premiers $2, 3, 5, \dots, p$, il sera un carré, ou le produit d'un carré par ce nombre premier.

2. Aucun des facteurs $x, (x+1), (x+2), \dots, (x+n)$, ne peut admettre comme diviseurs tous les nombres $2, 3, 5, \dots, p$. C'est ce que je vais démontrer.

Supposons, en premier lieu, que l'un des deux facteurs extrêmes, par exemple x , soit séparément divisible par $2, 3, 5, \dots, p$. Alors $x+1$ qui est premier avec x , n'admettant aucun de ces diviseurs, sera un carré exact (1. 1°). Et comme x est, par hypothèse, multiple de $(2.3.5\dots p)$, les facteurs $x+2, x+4$ seront divisibles par 2, et n'auront pas d'autre diviseur compris dans la suite $2, 3, 5, \dots, p$. En outre, aucun des deux facteurs $x+2, x+4$ n'est un carré, car $(x+1)$ étant le carré d'un nombre entier plus grand que l'unité, tout autre nombre plus grand que $x+1$ ne peut être le carré d'un nombre entier que s'il surpasse $x+1$ d'au moins cinq unités. Il faut donc (1, 2°) que $x+2, x+4$ soient des nombres entiers de la forme $2a^2, 2b^2$, ce qui exige qu'on ait $b^2 - a^2 = 1$. On est donc conduit à cette conclusion que, si x était multiple de $(2.3.5\dots p)$, la

différence des carrés des deux nombres entiers b , a serait égale à l'unité.

La même démonstration convient à l'autre facteur extrême $x + n$.

Quant aux facteurs intermédiaires $x + 1, x + 2, \dots, (x + n - 1)$, si l'un d'eux, $x + 1$ par exemple, était multiple de $(2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p)$, les deux facteurs $x, x + 2$ qui le comprennent seraient des carrés $(1, 1^0)$, ce qui est évidemment impossible, puisqu'ils diffèrent seulement de deux unités.

3. Application. L'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = y^2$$

n'a aucune solution entière. En d'autres termes : le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré.

Dans le cas actuel, $p = 3$, et $(2 \dots p) = 6$. Donc, si les cinq nombres $x, x + 1, \dots, x + 4$, remplissent la condition que l'équation proposée exprime, aucun d'eux ne peut être multiple de 6, (2). Il en résulte que le plus petit de ces cinq nombres, x , est de la forme $6n + 1$. D'où il suit que x n'admettant pour diviseur aucun des deux nombres premiers 2, 3, est un carré $(1, 1^0)$. Par conséquent, le produit $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ de quatre nombres entiers consécutifs devrait aussi être un carré; ce qui est impossible (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 393.)

4. Soit, maintenant,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = y^2,$$

l'équation proposée. On a

$$p = 5 \quad \text{et} \quad (2, 3 \dots p) = 30.$$

Nous allons faire voir que si l'équation admettait une

solution entière, il en résulterait cette absurdité : que parmi six nombres entiers consécutifs $x, (x+1), \dots, (x+5)$, il n'y aurait pas un seul multiple de 6.

Démontrons d'abord qu'aucun des deux facteurs extrêmes $x, (x+5)$, du produit $x(x+1), \dots, (x+5)$ ne peut être multiple de 6.

Si $x = 6a$, le nombre entier a n'est pas divisible par 5 (2). Or, l'égalité $x = 6a$ donnant $x+5 = 6a+5$, on voit que $x+5$ est premier avec 2, 3, 5; donc $(x+5)$ est un carré (1, 1°.) Par suite, le produit

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

de cinq nombres entiers consécutifs serait un carré exact; c'est ce qui n'a jamais lieu (3).

La même démonstration convient à l'autre facteur extrême $x+5$.

Il reste à considérer les facteurs intermédiaires $(x+1), (x+2), (x+3), (x+4)$. Si l'un d'eux, $x+2$, par exemple, est multiple de 6, il est clair que les deux facteurs $x+3, x+1$ qui comprennent $x+2$, seront premiers avec 6; et comme ils ne peuvent être, tous deux, multiples de 5, l'un d'eux n'admettra aucun des diviseurs 2, 3, 5, et sera par conséquent le carré, a^2 , d'un nombre entier. L'autre facteur $a^2 \pm 2$ n'étant pas un carré, devra être divisible par 5 (1, 1°). On aurait donc

$$a^2 \pm 2 = 5n;$$

or, cette égalité ne peut exister, car la formule des carrés qui ne sont pas multiples de 5 est, comme on sait,

$$a^2 = 5n \pm 1.$$

Il résulte de ce qui précède, que le produit de six nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

5. Il en est de même du produit de sept nombres con-

écutifs. Car, si l'équation

$$x(x+1)\dots(x+5)(x+6) = y^2$$

admettait une solution entière, aucun des sept nombres $x, (x+1), \dots, (x+5), (x+6)$ ne serait divisible par 6.

En effet, p étant encore égal à 5, on démontrera, comme dans le cas précédent, qu'il est impossible que l'un des facteurs intermédiaires $x+1, \dots, x+5$ soit multiple de 6. Il n'y a lieu à démonstration nouvelle que pour les facteurs extrêmes $x, x+6$.

Supposons $x = 6m$, on aura

$$x+6 = 6(m+1);$$

et aucun des deux nombres $m, m+1$ ne sera divisible par 5 (2). Or, les égalités

$$x = 6m, \quad x+6 = 6(m+1)$$

donnent

$$x+1 = 6(m+1) - 5 \quad \text{et} \quad x+5 = 6m+5.$$

Ces dernières montrent que les facteurs $x+1, x+5$ ne sont divisibles par aucun des trois nombres premiers 2, 3, 5. Donc (1, 1^o), on a

$$x+1 = a^2, \quad x+5 = b^2, \quad \text{d'où} \quad b^2 - a^2 = 4;$$

égalité qui est impossible, puisque la différence des carrés de deux nombres entiers b, a , plus grands que l'unité, est égale au moins à 5. Il est ainsi démontré que l'équation proposée n'admet pas de solution entière. G.
