

E.-E. KUMMER

**Théorie générale des systèmes de
rayons rectilignes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 362-371

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__362_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORIE GÉNÉRALE
DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES (*) ;**

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

On a peu étudié jusqu'ici dans toute leur généralité les systèmes de rayons rectilignes qui remplissent tout l'espace ou une partie de l'espace de telle manière que, par chaque point donné, il passe un rayon ou un nombre déterminé de rayons. Dans les recherches géométriques, on s'est occupé surtout d'un système déterminé de rayons, savoir : celui où tous les rayons peuvent être considérés comme normaux à une même surface. La théorie de ce système a la connexion la plus intime avec celle de la courbure des surfaces. Les propriétés les plus remarquables de ce système ont été trouvées par Monge et exposées par lui dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* (**). Comme les systèmes de rayons rectilignes dans l'espace ont une grande importance dans l'optique, leur théorie a souvent été étudiée comme question de physique; mais,

(*) Ce Memoire est un modèle de géométrie analytique d'une grande fécondité théorique et physique et il est élémentaire. Je donne ce nom à tout ce qui est bien étage, bien éclairé, à ce qui n'exige point des pas trop élevés. Les ouvrages d'Euler, de Lagrange sont plus élémentaires que certaines arithmétiques. (Note du Rédacteur).

(**) 5^e édition, par M. Liouville; 1850.

à ce point de vue, on n'a guère étudié non plus que les systèmes de rayons normaux à une même surface. La théorie générale de ces rayons a conduit d'une manière remarquable à un des plus beaux théorèmes de l'optique, au théorème de Malus généralisé par Dupin. Voici l'énoncé de ce théorème : *Tous les systèmes lumineux issus d'un point sont normaux à une même surface après avoir subi un nombre quelconque de réflexions sur des surfaces quelconques données et un nombre quelconque de réfractions par le passage au travers de milieux limités jouissant de pouvoirs réfringents différents.* Cette propriété n'appartient pas aux systèmes irréguliers de rayons que l'on obtient après le passage de la lumière à travers les cristaux. Ces rayons forment des systèmes qui ne sont plus normaux à une même surface et que, pour cette raison, on a nommés *systèmes irréguliers*. Quoique les cristaux ne donnent naissance qu'à certains systèmes particuliers, ils ont cependant amené l'étude des systèmes les plus généraux de rayons rectilignes.

A ma connaissance, ces systèmes ont été étudiés pour la première fois par Hamilton, dans les *Transactions of the royal Irish Academy*, t. XVI, dans un supplément à son grand traité : *Theory of systems of rays*, où il ne les avait pas encore considérés. Ce traité, rédigé en vue de l'optique, ne renferme que les systèmes réguliers et leurs modifications par réflexions et réfractions, et les systèmes irréguliers donnés par le passage de la lumière à travers les cristaux. Dans ce premier supplément, Hamilton part de principes physiques et notamment de celui du moindre travail, et il cherche à déduire les propriétés géométriques du système général de rayons rectilignes, de la formule que donne ce principe. Il a découvert, par cette voie, une suite de propriétés remarquables du système le plus général de rayons. Il semble que ces

propriétés soient peu connues, car il n'en est pas fait mention dans les Mémoires qui ont paru depuis sur le même sujet. Approfondir de nouveau cette théorie traitée pour la première fois par Hamilton en employant la géométrie analytique à trois dimensions, la compléter en quelques points importants, tel est le but de ce Mémoire.

§ I. — *Formules et notations.*

Un rayon rectiligne du système sera déterminé si l'on donne un point x, y, z (coordonnées rectangulaires) de ce rayon et les angles que ce rayon forme avec les trois axes des coordonnées. Soient ξ, η, ζ les cosinus de ces angles. La relation qui lie entre eux différents rayons et qui en forme un système pourra être donnée de la manière suivante : les six quantités $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ sont des fonctions continues de deux variables indépendantes u et v . D'après cela, les points (x, y, z) se trouvant sur une certaine surface, les rayons du système peuvent être considérés comme issus des divers points de cette surface. Un point d'un rayon sera déterminé par sa distance à l'origine du rayon. Cette distance est comptée sur le rayon, nous la désignerons par r et nous la nommerons *abscisse*.

Considérons deux rayons du système. L'origine du premier rayon et sa direction sont déterminées par $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$. Pour le second, ces mêmes quantités deviennent $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta, \zeta + \Delta \zeta$; $\Delta x, \Delta y$, etc., ont des valeurs finies. La relation qui existe entre ces deux rayons sera connue, si l'on détermine : l'angle ϵ qu'ils forment entre eux, la longueur p de leur plus courte distance et la direction de cette plus courte distance, ou le cosinus α, λ, μ des angles qu'elle forme avec les trois axes, et enfin l'abscisse r du pied de cette plus courte distance sur le premier rayon. La géométrie

analytique donne ces quatre quantités en fonction des coordonnées des origines des deux rayons et de leurs directions, comme il suit :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \cos \varepsilon &= \xi (\xi + \Delta \xi) + \eta (\eta + \Delta \eta) + \zeta (\zeta + \Delta \zeta), \\
 (2) \quad \sin^2 \varepsilon &= (\eta \Delta \zeta - \zeta \Delta \eta)^2 + (\zeta \Delta \xi - \xi \Delta \zeta)^2 + (\xi \Delta \eta - \eta \Delta \xi)^2, \\
 (3) \quad p \sin \varepsilon &= (\eta \Delta \zeta - \zeta \Delta \eta) \Delta x + (\zeta \Delta \xi - \xi \Delta \zeta) \Delta y + (\xi \Delta \eta - \eta \Delta \xi) \Delta z, \\
 (4) \quad x &= \frac{\eta \Delta \zeta - \zeta \Delta \eta}{\sin \varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\zeta \Delta \xi - \xi \Delta \zeta}{\sin \varepsilon}, \quad \mu = \frac{\xi \Delta \eta - \eta \Delta \xi}{\sin \varepsilon}, \\
 (5) \quad p &= x \Delta x + \lambda \Delta y + \mu \Delta z, \\
 (6) \quad \left\{ \begin{aligned} r \sin \varepsilon &= [\mu (\eta + \Delta \eta) - \lambda (\zeta + \Delta \zeta)] \Delta x \\ &+ [x (\zeta + \Delta \zeta) - \mu (\xi + \Delta \xi)] \Delta y + [\lambda (\xi + \Delta \xi) - x (\eta + \Delta \eta)] \Delta z. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Au moyen des relations

$$\begin{aligned}
 \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1, \\
 (\xi + \Delta \xi)^2 + (\eta + \Delta \eta)^2 + (\zeta + \Delta \zeta)^2 &= 1,
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(7) \quad \xi \Delta \xi + \eta \Delta \eta + \zeta \Delta \zeta = -\frac{1}{2} (\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 + \Delta \zeta^2),$$

on peut mettre les expressions de $\cos \varepsilon$, $\sin \varepsilon$, r sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \cos \varepsilon &= 1 - \frac{1}{2} (\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 + \Delta \zeta^2), \\
 (9) \quad \sin^2 \varepsilon &= \Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 + \Delta \zeta^2 - \frac{1}{4} (\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 + \Delta \zeta^2)^2, \\
 (10) \quad \left\{ \begin{aligned} r \sin^2 \varepsilon &= -(\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta) + \frac{1}{2} (\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 + \Delta \zeta^2) \\ &\times [\Delta x (\xi + \Delta \xi) + \Delta y (\eta + \Delta \eta) + \Delta z (\zeta + \Delta \zeta)]. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Considérons les distances des deux rayons en chacun de leurs points, ces distances étant mesurées par les perpendiculaires abaissées des différents points du second sur le premier, nommons q les longueurs de ces perpendicu-

lares, R les abscisses de leurs pieds sur le premier rayon, α', λ', μ' les cosinus des angles qu'elles forment avec les trois axes ; nous avons

$$(11) \quad \begin{cases} q\alpha' = \Delta x - R\xi + \frac{(R-P)(\xi + \Delta\xi)}{\cos \varepsilon}, \\ q\lambda' = \Delta y - R\eta + \frac{(R-P)(\eta + \Delta\eta)}{\cos \varepsilon}, \\ q\mu' = \Delta z - R\zeta + \frac{(R-P)(\zeta + \Delta\zeta)}{\cos \varepsilon}. \end{cases}$$

Nous avons posé, pour abrégér,

$$P = \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z.$$

Supposons que le second rayon se rapproche infiniment près du premier, de manière que les différences Δx , Δy , etc., deviennent les différentielles dx , dy , etc. Les quantités p, q, ε deviennent infiniment petites, désignons-les par $dp, dq, d\varepsilon$. Les infiniment petits d'ordre supérieur disparaissant, il vient

$$(12) \quad d\varepsilon^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

$$(13) \quad \alpha = \frac{\eta d\zeta - \zeta d\eta}{d\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{d\varepsilon}, \quad \mu = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{d\varepsilon},$$

$$(14) \quad dp = \alpha dx + \lambda dy + \mu dz,$$

$$(15) \quad r = -\frac{dx d\xi + dy d\eta + dz d\zeta}{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha' dq = dx + R d\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda' dq = dy + R d\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu' dq = dz + R d\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \end{cases}$$

$x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ étant des fonctions des deux variables indépendantes u et v , leurs différentielles peuvent s'exprimer par les quotients différentiels partiels pris par rapport à u et à v , et par les différentielles du et dv .

Nous emploierons les mêmes notations que Gauss dans ses *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pour les premiers quotients différentiels partiels et pour les expressions qui résultent de leurs combinaisons ; ainsi nous posons

$$(17) \quad dx = adu + a' dv; \quad dy = bdu + b' dv; \quad dz = cdu + c' dv;$$

$$(18) \quad bc' - b'c = A, \quad ca' - ac' = B, \quad ab' - ba' = C,$$

$$(19) \quad a^2 + b^2 + c^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = F, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G (*).$$

Nous emploierons des notations analogues pour les quotients différentiels partiels des quantités ξ, η, ζ et pour les expressions qui résultent de leurs combinaisons :

$$(20) \quad d\xi = adu + a' dv; \quad d\eta = bdu + b' dv; \quad d\zeta = cdu + c' dv,$$

$$(21) \quad bc' - cb' = \mathfrak{A}, \quad ca' - ac' = \mathfrak{B}, \quad ab' - ba' = \mathfrak{C},$$

$$(22) \quad a^2 + b^2 + c^2 = \mathfrak{E}, \quad aa' + bb' + cc' = \mathfrak{F}, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = \mathfrak{G}.$$

Par suite, nous avons

$$(23) \quad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = \Delta^2.$$

Plus loin, nous emploierons aussi les abréviations suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} aa + bb + cc = e, \\ a'a + b'b + c'c = f, \\ aa' + bb' + cc' = f', \\ a'a' + b'b' + c'c' = g. \end{cases}$$

Le quotient des différentielles des deux variables indépendantes du et dv sera représenté par t , ainsi

$$(25) \quad \frac{dv}{du} = t.$$

De l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 195 ; 1852.

qui, différenciée successivement par rapport à u et à v , donne

$$(26) \quad \begin{cases} \xi a + \eta b + \zeta c = 0, \\ \xi a' + \eta b' + \zeta c' = 0, \end{cases}$$

on tire

$$(27) \quad \xi = \frac{cb}{\Delta}, \quad \eta = \frac{ab}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{c}{\Delta},$$

nous emploierons ces expressions avec avantage.

Les valeurs de ξ , η , ζ sont indéterminées dans le cas où $\Delta = 0$, car l'équation $\Delta = 0$ entraîne les équations $ab = 0$, $cb = 0$, $c = 0$. Ce cas ne se présente que pour un système particulier de rayons, et dans son étude il exige une légère modification dans les méthodes générales. Nous ne le considérerons pas spécialement, le système de rayons correspondant peut être considéré comme une limite du système général.

§ II. — *Points limites des plus courtes distances d'un rayon à un rayon infiniment voisin.*

En remplaçant dx , dy , dz , $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ par les quotients différentiels et les différentielles des variables indépendantes, l'expression (15) de l'abscisse du point du premier rayon le plus rapproché d'un rayon infiniment voisin sera

$$(1) \quad r = - \frac{e + (f + f')t + gt^2}{c + 2ft + \zeta t^2}.$$

Pour une certaine valeur de $t = \frac{dv}{du}$, cette expression donne la plus courte distance du premier rayon à un rayon infiniment voisin déterminé. On obtient toutes les valeurs de r , c'est-à-dire les valeurs de r qui correspondent à tous les rayons infiniment voisins, en faisant varier

t de $-\infty$ à $+\infty$. La valeur de r ne peut être nulle pour aucune des valeurs de t , puisque $\mathcal{C}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$ n'est jamais négatif; nous écartons le cas où $\mathcal{C}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = 0$. Donc, les valeurs de r ne peuvent jamais être infinies et doivent rester comprises entre certaines limites données par le maximum et le minimum de r . On a donc le théorème suivant :

Les pieds des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins qui l'entourent, se trouvent tous sur un segment déterminé de ce rayon.

Egalons à zéro le quotient différentiel de r par rapport à t . Cette équation nous donnera les valeurs de t qui déterminent les points-limites (extrémités du segment)

$$(2) \quad (\mathcal{C} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2)(f + f' + 2gt) - [e + f + f']t + gt^2(2\mathcal{F} + 2\mathcal{G}t) = 0,$$

ou en simplifiant

$$(3) \quad \left[g\mathcal{F} - \frac{1}{2}(f + f')\mathcal{G} \right] t^2 - (e\mathcal{G} - g\mathcal{C})t + \left[\frac{1}{2}(f + f')\mathcal{C} - e\mathcal{F} \right] = 0.$$

Soient t_1 et t_2 les racines toujours réelles de cette équation quadratique, on a

$$(4) \quad t_1 + t_2 = \frac{e\mathcal{G} - g\mathcal{C}}{g\mathcal{F} - \frac{1}{2}(f + f')\mathcal{G}}, \quad t_1 t_2 = \frac{\frac{1}{2}(f + f')\mathcal{C} - e\mathcal{F}}{g\mathcal{F} - \frac{1}{2}(f + f')\mathcal{G}}.$$

De là, on tire ces deux équations remarquables :

$$(5) \quad \mathcal{C} + \mathcal{F}(t_1 + t_2) + \mathcal{G}t_1 t_2 = 0,$$

$$(6) \quad e + \frac{1}{2}(f + f')(t_1 + t_2) + gt_1 t_2 = 0,$$

auxquelles on peut ajouter celles-ci qui se déduisent

facilement des précédentes

$$(7) \quad \mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2 = (t_1 - t_2)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1),$$

$$(8) \quad \mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2 = (t_2 - t_1)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2),$$

$$(9) \quad (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2) = -\Delta^2,$$

$$(10) \quad (\mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2)(\mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2) = \Delta^2(t_2 - t_1)^2.$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les valeurs extrêmes de r qui correspondent à $t = t_1$ et $t = t_2$, on a

$$(11) \quad r_1 = -\frac{e + (f + f')t_1 + gt_1^2}{\mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2},$$

$$(12) \quad r_2 = -\frac{e + (f + f')t_2 + gt_2^2}{\mathcal{C} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2}.$$

Au moyen de l'équation (2) on peut donner à ces expressions les formes plus simples :

$$(13) \quad r_1 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')t_1}{\mathcal{C} + \mathcal{F}t_1} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + \mathcal{G}t_1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1},$$

$$(14) \quad r_2 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')t_2}{\mathcal{C} + \mathcal{F}t_2} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + \mathcal{G}t_2}{\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2}.$$

Si l'on élimine t_1 et t_2 entre ces équations, on obtient l'équation quadratique suivante dont les racines toujours réelles r_1 et r_2 sont les abscisses des points-limites des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{C}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)r^2 - [g\mathcal{C} - (f + f')\mathcal{F} + e\mathcal{G}]r + eg \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{4}(f + f')^2 = 0. \end{array} \right.$$

On tire de cette équation

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 + r_2 = \frac{-[gC - (f + f')\mathcal{F} + eG]}{\Delta^2}, \\ r_1 r_2 = \frac{eg - \frac{1}{2}(f + f')^2}{\Delta^2}. \end{array} \right.$$

Le segment sur lequel se trouvent les pieds de toutes les plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins est égal à la différence des abscisses des points-limites. Désignons par $2d$ la longueur de ce segment, par m l'abscisse du point milieu des deux points-limites, on aura

$$(17) \quad d = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad m = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

(La suite prochainement.)
