Nouvelles annales de mathématiques

Théorèmes sur les cercles qui touchent les côtés d'un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 354-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__354_1>

THÉORÈMES SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT LES COTÉS D'UN TRIANGLE.

Le cercle qui touche intérieurement un triangle donne lieu à *trois points de contact intérieurs* et les trois cercles qui touchent extérieurement donnent lieu à *trois points de contact extérieurs*.

Théorème I. Les trois droites qui vont des sommets aux points de contact intérieurs des côtés opposés se coupent en un *même point*; ce point, le centre du cercle intérieur, le centre de gravité de l'aire du triangle sont sur une *même droite*. Ce dernier point tombe entre les deux autres et partage leur intervalle dans le rapport de $1:2$.

Théorème II. Les trois droites qui vont des sommets aux *points de contact intérieurs* se coupent en un même point I.

Les trois droites qui vont respectivement des centres des cercles extérieurs aux points *milieux* des côtés du triangle qu'ils touchent se coupent en un même point I_1;

les points I, I_1 et le centre de gravité de l'aire sont sur une *même* droite, et ce centre partage l'intervalle entre I et I_1 dans le rapport de 1 : 2.

Théorème III. Les perpendiculaires abaissées des centres des cercles extérieurs sur les côtés du triangle qu'ils touchent, se coupent en un même point également éloigné de ces trois centres; ce point, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit sont sur une même droite et ce dernier point est au milieu des deux autres points.

Théorème IV. Prenons deux cercles extérieurs E_1, E_2, le cercle intérieur I; du centre de E_1 abaissons une perpendiculaire sur le côté correspondant à E_2; du centre E_2 une perpendiculaire sur le côté correspondant à E_1, et du centre de I une perpendiculaire sur le troisième côté: ces trois perpendiculaires se coupent en un même point également éloigné des trois centres des cercles E_1, E_2, I.

Ce point, le centre du cercle extérieur E_3, le centre du cercle circonscrit au triangle, sont sur une même droite, et le dernier point est au milieu des deux autres.

Théorème V. Soit le triangle ABC. Le cercle E touche BC (opposé à A) prolongé, en e_1; le cercle E_2 touche AC (opposé à B) prolongé, en e_2; le cercle intérieur I touche AB (opposé à C), en i_1; les trois droites Ae_1, Be_2, Ci_1 se coupent en un même point; ce point, le centre du cercle qui touche AB extérieurement et le centre de gravité sont sur une *même* droite, et ce dernier point partage l'intervalle entre les deux premiers dans le rapport de 1 : 2.

Ces théorèmes sont énoncés par M. Nagel, recteur de l'École Industrielle (*Real-Schule*) à Ulm.
