NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEMOINE

Question du grand concours de mathématiques spéciales (juillet 1860)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 349-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__349_1>

QUESTION DU GRAND CONCOURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (JUILLET 1860);

PAR M. LEMOINE,
Élève du Prytanée Militaire.

Étant donnés deux ellipsoïdes A *et* B, *trouver le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à* A *et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de* B.

Lemme. On peut supposer A et B concentriques; car en transportant B, par exemple, parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son centre coïncide avec celui de A, on ne changera pas la direction des diamètres conjugués.

Soient alors

$$(\alpha)\ Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bzy + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$
$$(\beta)\ A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1zy + 2B'_1xz + 2B''_1xy + F''_1 = 0,$$

les équations des deux ellipsoïdes.

Soit

$$x = mz, \quad y = z,$$

les équations d'une droite. Les plans diamétraux correspondants à cette direction de cordes seront dans les deux ellipsoïdes

$$(Am + B' + B''n)x + (A'n + B + B''m)y + (A'' + Bn + B'm)z = 0,$$
$$(A_1m + B'_1 + B''_1n)x + (A'_1n + B_1 + B''_1m)y + (A''_1 + B_1n + B'_1m\ z = 0.$$

Si

$$\frac{Am + B' + B''n}{A_1m + B'_1 + B''_1n} = \frac{A'n + B + B''m}{A'_1n + B_1 + B''_1m} = \frac{A'' + Bn + B'm}{A''_1 + B_1n + B'_1m} = z,$$

alors ces deux plans coïncident.

Appelons z la valeur commune de ces rapports : si je démontre qu'il y a des valeurs réelles pour z, il y en aura pour m et n.

On aura donc

$$(1)\quad (A - A_1z)m + (B'' - B''_1z)n + (B' - B'_1z) = 0,$$

d'où

$$(2)\quad (B'' - B''_1z)m + (A' - A_1z)n + (B - B_1z) = 0,$$
$$(3)\quad (B' - B_1z)m + (B - B_1z)n + (A'' - A'_1z) = 0.$$

Eliminant m et n, on trouve (déterminant)

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2(B - B_1z)(B' - B'_1z)(B'' - B''_1z) \\ & + (A - A_1z)(A' - A'_1z)(A'' - A''_1z) - (B - B_1z)^2(A - A_2z) \\ & - (B - B'_1z)^2(A' - A'_1z) - (B'' - B''_1z)^2(A'' - A''_1), \end{aligned}$$

équation du troisième degré qui, ayant pour coefficient de z^3

$$-2B_1B'_1B'_1 - A_2A'_1A''_1 + A_1B_1^2 + A'_1B'^2_1 + A''_1B''^2_1,$$

et pour terme tout connu

$$+2BB'B'' + AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

a toujours une racine réelle finie et différente de zéro, car les deux expressions précédentes représentant les dénominateurs des coordonnées du centre des deux surfaces ne sont pas nulles, puisqu'il s'agit de deux surfaces à centre.

Soit OZ la droite qui a pour équation $x=mz, y=nz$, m et n ayant les valeurs que donnent deux quelconques des équations (3), (2), (1), jointe à la valeur réelle que nous venons de déterminer pour z.

Considérons le plan diamétral qui correspond à cette droite, il est le même pour les deux surfaces.

Soient $C''a$ et $C''b$ les ellipses suivant lesquelles il coupe les surfaces A et B. On sait qu'étant données deux ellipses concentriques, on peut toujours trouver un système de diamètres conjugués commun aux deux ellipses. Appelons OX et OY ces deux diamètres conjugués pour les ellipses $C'a$ et $C'b$. Cela posé, il est évident que les trois droites OZ, OY, OX, forment un système de diamètres conjugués communs aux deux ellipsoïdes. Donc en prenant ces droites pour axes coordonnés, on peut donner aux équations des deux ellipsoïdes les formes suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} (B) \qquad \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}=1, \\[2ex] (A) \qquad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

Solution de la question.

Posons $x = a'x_1$, $y = b'y_1$, $z = c'z_1$, et substituons. Les deux équations deviendront

$$(2)\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{B}') & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,\\ (\mathrm{A}') & \dfrac{a'^2x_1^2}{a^2} + \dfrac{b'^2y_1^2}{b^2} + \dfrac{c'^2z_1^2}{c^2} = 1.\end{array}\right.$$

Et résolvons la question pour ce système d'équations, il est évident que si nous trouvons pour équation du lieu $f(x_1 y_1 z_1) = 0$, le lieu pour le premier système sera

$$f\left(\frac{x}{a'}\,\frac{y}{b'}\,\frac{z}{c'}\right) = 0.$$

Cela posé, considérons le système suivant en supposant les axes rectangulaires

$$(3)\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{A}'') & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1,\\ (\mathrm{A}'') & \dfrac{a'^2x_2^2}{a^2} + \dfrac{b'^2y_2^2}{b^2} + \dfrac{c'^2z_2^2}{c^2} = 1.\end{array}\right.$$

La première équation B″ représente une sphère, et par suite tous ses plans diamétraux conjugués sont rectangulaires; donc pour ce système la question revient à ce théorème de Monge : Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrit à une ellipsoïde est une sphère, sphère qui, dans notre question, a pour équation

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2}.$$

Mais les relations algébriques que donnent le système de l'équation (2) et le système de l'équation (3) sont identiquement les mêmes; donc le résultat du calcul algébrique sera pour le système de l'équation (2) comme pour l'équation (3)

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2},$$

et en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leur valeur en x, y, z, on aura pour l'équation dans le système (1)

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2}.$$

C. Q. F. D.

Ce qui est un ellipsoïde semblable à B, concentrique et semblablement disposé.

Note du Rédacteur. Le théorème subsiste pour deux surfaces du second degré quelconques. On le démontre par des transformations linéaires qui maintiennent le parallélisme des plans et des droites.