NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Solution de la question 407

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 316-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__316_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 407

(voir t. XVI, p. 402);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

LEMME. *Étant données, sur une droite, deux séries de segments en involution, qui se correspondent anharmoniquement, il existe deux segments de la première* *série qui sont divisés harmoniquement par ceux qui leur correspondent dans la seconde série.*

En effet, supposons que les équations

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

et

$$x^2 + Ax + B = 0 \tag{2}$$

aient respectivement pour racines les distances des *points doubles* des deux involutions proposées à une origine fixe prise sur la droite donnée; a, b, A, B sont des quantités connues; les équations suivantes :

$$x^2 + a'x + \frac{aa'}{2} - b = 0 \tag{3}$$

et

$$x^2 + A'x + \frac{AA'}{2} - B = 0, \tag{4}$$

dans lesquelles a' et A$'$ sont deux indéterminées, pourront représenter les deux séries de segments en involution. Car chaque valeur particulière de a' détermine un segment qui est divisé harmoniquement par le segment fixe que représente l'équation (1), puisque la relation

$$b + \left(\frac{aa'}{2} - b\right) - \frac{aa'}{2} = 0 \quad \text{(voir \textit{Géom. sup.}, n° 93, p. 61)}$$

est satisfaite; et réciproquement, chaque segment de la première involution détermine une valeur de a', et le même raisonnement s'applique à l'équation (2). Mais, d'après l'énoncé, les segments des deux séries se correspondent anharmoniquement; donc il existe, entre les deux variables a' et A$'$, une relation du premier degré de la forme

$$a'A' + \lambda . a' + \mu . A' + \nu = 0;$$

d'où

$$A' = -\frac{\lambda.a' + \nu}{a' + \mu},$$

et, par conséquent, l'équation (4) devient, en y substituant cette valeur de A',

$$(5) \qquad x^2 - \frac{\lambda.a' + \nu}{a + \mu}x - \left(B + \frac{A}{2}\cdot\frac{\lambda.a' + \nu}{a' + \mu}\right) = 0.$$

Pour que les deux équations (3) et (5), qui ne contiennent plus qu'un seul paramètre variable a', représentent deux segments en rapport harmonique, il faut qu'on ait (*Géom. sup.*, n° 93)

$$\frac{aa'}{2} - b - B - \frac{A}{2}\cdot\frac{\lambda a' + \nu}{a' + \mu} + \frac{a'(\lambda.a' + \nu)}{2(a' + \mu)} = 0,$$

c'est-à-dire une équation de la forme

$$a'^2 + \alpha a' + \beta = 0$$

qui donnera pour a' deux valeurs (réelles ou imaginaires) auxquelles correspondront, dans chaque série, deux segments satisfaisant à la question. C. Q. F. D.

Théorème. *Étant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes, menées de ce point aux deux coniques, forment un faisceau harmonique est une conique* (les deux tangentes d'une même conique étant conjuguées entre elles dans le faisceau harmonique) (*).

On va démontrer qu'une droite quelconque L ne coupe le lieu cherché qu'en deux points.

En effet, soit T l'une des tangentes communes aux deux coniques. Si un point a se meut sur L, les tangentes aux deux coniques, issues de ce point, marquent sur T deux séries de segments en involution (*Géom. sup.*, n° 702),

(*) Évident pour deux cercles ; donc.... Tm et les segments de la première série correspondent anharmoniquement à ceux de la seconde série, parce que les uns et les autres correspondent aux points a.

Donc, d'après le lemme, il y a, dans chaque série, deux segments qui divisent harmoniquement leurs homologues, et par suite il y a sur L deux points (réels ou imaginaires) qui satisfont à la question. Donc le lieu cherchée est une conique.

Cette conique passe par les huit points de contact des quatre tangentes communes aux deux coniques. Car, pour chacun d'eux, les deux tangentes à l'une des coniques se confondent avec l'une de celles qu'on peut mener de ce point à l'autre conique, et, par conséquent, ces quatre tangentes, dont trois sont coïncidentes, satisfont à la condition. Donc, inversement, ces huit points de contact sont sur une même conique, comme on le démontre directement (voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 94).

Ces points de contact peuvent être définis d'une manière qui donne plus de généralité à l'énoncé et à la construction, en disant qu'ils sont les points d'intersection des deux coniques par les polaires de deux centres d'homologie conjugués, prises relativement à ces deux courbes respectivement.

Le théorème qui précède, transformé par la théorie des figures corrélatives, devient celui-ci :

L'enveloppe d'une droite mobile, qui coupe deux coniques données en quatre points qui sont constamment en rapport harmonique, est une conique; et cette conique touche les huit tangentes qu'on peut mener aux deux courbes par les quatre pôles de deux de leurs axes de symptose conjugués, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques respectivement.