

E. ROCHE

**Nouvelle somme du reste de la série
de Taylor (voir p. 308)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 311-315

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__311_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE SOMME DU RESTE DE LA SÉRIE DE TAYLOR

(voir p 308) ;

D'APRÈS M. E. ROCHE,

Professeur à Montpellier.

1. *Lemme.* Lorsque la dérivée d'une fonction par rapport à une variable reste constamment positive pour toutes les valeurs comprises entre deux limites, la fonction primitive va en croissant depuis la petite jusqu'à la grande limite.

2. R désignant le reste de la série de Taylor, on a, en s'arrêtant au $n^{i\text{ème}}$ terme,

$$R = f(x+h) - fx - hf'x - \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \dots - h^n f^n x ;$$

faisons $x+h = z$, on a

$$R = fz - fx - (z-x)f'x - \frac{(z-x)^2}{1 \cdot 2} f''x - \frac{(z-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x - \dots - \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^n(x) ;$$

de là

$$\frac{dR}{dx} = - \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{n+1}(x).$$

Retranchant de cette équation l'identité

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(z-x)^{p+1} C}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot p + 1} \right) = - \frac{(z-x)^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

où C est une constante quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(R - \frac{(z-x)^{p+1} C}{1.2.3\dots n.p+1} \right) \\ &= \frac{(z-x)^p}{1.2.3\dots n} [C - (z-x)^{n-p} f^{(n+1)} x] = \frac{(z-x)^p}{1.2.3\dots n} (C - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Supposons $x < z$; p un nombre positif ne surpassant pas n , et $f^{(n+1)} x$ restant continue dans l'intervalle de x à z ; dès lors

$$(z-x)^{n-1} f^{(n+1)} x = \varphi(x)$$

reste continue dans le même intervalle.

Désignons par M la plus grande valeur que prend cette fonction $\varphi(x)$ dans cet intervalle.

Prenons

$$C = M;$$

$M - \varphi(x)$ reste donc constamment positif; donc, d'après le lemme, la fonction primitive

$$R - \frac{(z-x)^{p+1} M}{1.2.3\dots n.p+1} = \psi(x)$$

va toujours en croissant depuis x jusqu'à z .

Mais lorsque $x = z$, on a

$$R = 0 \quad \text{et} \quad \frac{(z-x)^{p+1} M}{1.2.3\dots n.p+1} = 0;$$

et par conséquent $\psi(x) = 0$, et puisque $\psi(x)$ va en croissant, il faut donc que les valeurs de $\psi(x)$ soient négatives.

On a donc dans l'intervalle de x à z

$$R < \frac{(z-x)^{p+1} M}{1.2.3\dots n.p+1}.$$

Désignons maintenant par m la plus petite valeur de $\varphi(x)$, croissant de x à z ; le même genre de raisonnement con-

duirait à l'inégalité

$$R > \frac{(z-x)^{p+1} m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot p+1}.$$

Il existe donc entre M et m une valeur intermédiaire N de $\varphi(x)$, correspondant à une valeur intermédiaire entre x et z , telle que

$$R = \frac{(z-x)^{p+1} N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot p+1}.$$

La valeur intermédiaire entre x et z est égale à $x + \theta(z-x)$, où θ est une fraction, un nombre compris entre 0 et 1; on a donc

$$\begin{aligned} N &= [z-x-\theta(z-x)]^{n-p} f^{(n+1)}[x+\theta(z-x)] \\ &= (z-x)^{n-p} (1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}[x+\theta(z-x)]; \end{aligned}$$

donc

$$R = \frac{(z-x)^{p+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot p+1} (z-x)^{n-p} (1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}[x+\theta(z-x)].$$

Posons

$$h = z - x;$$

où h est positif, on a

$$(A) \quad R = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot p+1} (1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}(x+\theta h);$$

telle est la nouvelle expression de R .

On arrive au même résultat en supposant $x > z$; et dès lors h négatif.

2. Lorsque $n = 0$, cette formule n'est plus applicable; alors on a

$$R = f(z) - fx,$$

$$\frac{dR}{dx} = -f'(x);$$

retranchant de cette équation l'identité

$$\frac{d}{dx} \frac{(z-x)^{p+1}}{p+1} C = -(z-x)^p C,$$

il vient

$$\frac{d}{dx} \left(R - \frac{(z-x)^{p+1}}{p+1} \right) = (z-x)^p [C - (z-x)^{-p} f' x]$$

Si p est positif $(z-x)^{-p}$ devient infini lorsque $x = z$; si p est négatif, c'est $(z-x)^p$ qui devient infini ; la continuité exige donc que $p = 0$: donc

$$\frac{d}{dx} [R - (z-x)] C = C - f' x$$

M et m étant la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de x à z , $R - M(z-x)$ et $R - m(z-x)$ sont de signes contraires ; donc

$$R = (z-x) f' [x + \theta(z-x)],$$

ou

$$R = h f' (x + \theta h).$$

θ et h comme ci-dessus.

3. Si l'on fait dans (A) $p = n$, et ensuite $p = 0$, on obtient

$$R = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots n \cdot n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad (\text{CAUCHY}),$$

$$R = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n+1)}(x + \theta h) \dots$$

Le nombre p qui entre dans la formule générale pouvant prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à n , donne des limites plus resserrées que celles qui sont en usage.

Remarque. L'auteur fait observer que ce procédé est analogue à celui de Sturm (*Cours d'Analyse*, t. I,

p. 87); mais il donne encore un second procédé fondé sur le calcul intégral, et qui a déjà été employé par M. Jürgensen, géomètre danois (p. 308).

4. Série de Maclaurin (*). Faisant $x = 0$ et remplaçant h par x , on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{1.2.3\dots n} + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\dots n.p+1} f^{(n+1)}(\theta x).$$
