

GROS

## Sur une question de géométrie descriptive

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 29-32

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_29\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__29_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ;**

**PAR M. GROS,**  
Professeur de mathématiques.

---

Dans les cours de géométrie descriptive, on démontre ordinairement que si les axes de deux surfaces de révolution du second degré sont dans un même plan, la projection sur ce plan de la courbe d'intersection de ces deux surfaces est un arc de courbe du second degré.

On peut, en outre, à la simple inspection des don-

nées, reconnaître si cette projection est un arc d'ellipse, d'hyperbole ou de parabole.

En effet, si nous prenons pour origine le point de rencontre des deux axes, et pour plan des  $zx$  le plan de ces deux droites, nous pouvons écrire les équations des deux surfaces sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= m (ax + z)^2 + n (ax + z) + p, \\x^2 + y^2 + z^2 &= m' (a'x + z)^2 + n' (a'x + z) + p'.\end{aligned}$$

La projection sur le plan des  $zx$  de la courbe d'intersection de ces surfaces a pour équation

$$m (ax + z)^2 - m' (a'x + z)^2 + n (ax + z) - n' (a'x + z) + p - p' = 0.$$

Le genre de cette courbe est indiqué par le signe de l'expression

$$mm' (a - a')^2,$$

ou, ce qui revient au même, par le signe du produit

$$mm'.$$

Actuellement, pour reconnaître le signe de  $m$ , d'après la forme de la surface représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = m (ax + z)^2 + n (ax + z) + p,$$

nous remarquerons qu'en prenant trois nouveaux axes rectangulaires ayant même origine que les premiers, on a, en désignant par  $x, y, z$  et  $x', y', z'$ , les coordonnées d'un même point M, dans les deux systèmes,

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

car chaque membre de cette égalité représente le carré de la distance du point M à l'origine commune.

Si, de plus, nous prenons pour axe des  $x'$  l'axe de la surface, les équations de cette droite étant

$$y = 0, \quad x = az,$$

le plan représenté par l'équation

$$ax + z = 0$$

lui est perpendiculaire; par conséquent, la distance du point M à ce plan est représentée par  $x'$  dans le second système; mais cette même distance est représentée par  $\frac{ax + z}{\sqrt{1 + a^2}}$  dans le premier; donc

$$\frac{ax + z}{\sqrt{1 + a^2}} = x'.$$

Par suite, l'équation de la surface, par rapport au nouveau système d'axes, est

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = m(1 + a^2)x'^2 + nx'\sqrt{1 + a^2} + p,$$

ou

$$[1 - m(1 + a^2)]x'^2 + y'^2 + z'^2 - nx'\sqrt{1 + a^2} - p = 0.$$

Or, dans toute équation du second degré à trois variables, où n'entrent pas les rectangles de ces variables, les coefficients des carrés sont inversement proportionnels aux carrés des axes de la surface représentée par cette équation.

Par conséquent :

Si  $m$  est négatif, la surface est un ellipsoïde aplati;

Si  $m$  est nul, la surface est une sphère;

Si  $m$  est compris entre 0 et  $\frac{1}{1 + a^2}$ , la surface est un ellipsoïde allongé;

Si  $m$  est égal à  $\frac{1}{1 + a^2}$ , la surface est un paraboloïde ou un cylindre;

Si  $m$  est plus grand que  $\frac{1}{1 + a^2}$ , la surface est un hyperboloïde ou un cône.

En résumé,  $m$  est négatif dans le cas de l'ellipsoïde aplati, nul dans le cas de la sphère, et positif dans tous les autres cas.

( 32 )

D'où l'on conclut que , si l'une des surfaces seulement est un ellipsoïde aplati , la projection est un arc d'ellipse ; si l'une des surfaces est une sphère , la projection est un arc de parabole . Dans tous les autres cas , la projection est un arc d'hyperbole .