Nouvelles annales de mathématiques

C.-Alph. Valson

Des coordonnées paraboliques et de leur application à la géométrie des paraboloïdes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 298-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__298_1>

DES COORDONNÉES PARABOLIQUES
et de leur application à la géométrie des paraboloïdes (*);

PAR M. C.-ALPH. VALSON,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

J'ai essayé précédemment de faire une théorie générale de l'ellipsoïde et des figures qu'on peut tracer à sa surface, en partant des méthodes de M. Lamé relatives aux coordonnées elliptiques. C'est l'objet d'une thèse éditée chez M. Mallet-Bachelier en 1854, et dont il a été rendu compte dans les *Nouvelles Annales* (*voir* année 1859, p. 46 du Journal et p. 10 du *Bulletin bibliographique*).

Je me propose, dans ce nouveau travail, d'étendre les mêmes recherches aux surfaces du second degré dénuées de centre et en particulier au paraboloïde elliptique.

(*) Le calcul différentiel fait partie de l'enseignement des lycees sous le nom de *dérivées* et de *limite*. Le nom ne fait rien à l'affaire. Ainsi ce Memoire est à la portée des élèves des lycées, excepté ce qui concerne les lignes géodésiques; mais cette partie s'adresse aux élèves de l'École Normale et de l'École Polytechnique, et il n'y a pas de professeur qui ignore les travaux de MM. Lamé, Liouville, Bertrand, Bonnet sur cette géométrie des surfaces *réellement supérieure*. (*Note du Rédacteur.*)

I.

Des paraboloïdes orthogonaux.

Considérons le système des trois équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{u} + \dfrac{z^2}{u-e} = u + 2x, \\[2ex] \dfrac{y^2}{v} + \dfrac{z^2}{v+e} = v - 2x, \\[2ex] \dfrac{y^2}{w} - \dfrac{z^2}{e-w} = w + 2x, \end{cases}$$

dans lesquelles e conserve une valeur fixe et où l'on donne aux variables u, v, w toutes les valeurs possibles, pourvu toutefois que u reste toujours supérieur à e et que w lui soit au contraire toujours inférieur.

On vérifie facilement que ces trois équations appartiennent à trois séries de paraboloïdes dont les deux premiers sont elliptiques et le troisième hyperbolique, et de plus que ces surfaces sont orthogonales. L'équation qui exprime, par exemple, que les deux premières surfaces se rencontrent à angle droit est

$$\frac{y}{u}\cdot\frac{y}{v} + \frac{z}{u-e}\cdot\frac{z}{v+e} - 1 = 0,$$

et elle se déduit immédiatement des deux équations de ces surfaces en les ajoutant et supprimant le facteur commun $u+v$.

Ce système est analogue à certaines surfaces orthogonales du second degré douées de centre qui constituent la base de la méthode des *coordonnées elliptiques*. Dans le cas actuel, on aura à considérer ce qu'on peut appeler les *coordonnées paraboliques* dont je vais examiner les principales propriétés.

II.

Des coordonnées paraboliques.

On voit, d'après ce qui précède, qu'en un point M de l'espace on peut faire passer trois paraboloïdes orthogonaux. Réciproquement, ce point pourra être considéré comme déterminé au moyen de ces trois paraboloïdes, ou bien analytiquement au moyen des trois variables u, v, w qui les caractérisent; ces trois variables seront les *coordonnées paraboliques* du point.

Cela posé, occupons-nous d'abord d'exprimer les coordonnées rectilignes x, y, z du point M en fonction de ses coordonnées paraboliques u, v, w. On remarquera que les trois équations (1) se déduisent de la première en changeant u en $-v$ dans la seconde et en $+w$ dans la troisième. L'équation en u peut être mise ensuite sous la forme (*)

$$u^3 + u^2(2x - e) - u(2ex + y^2 + z^2) + ey^2 = 0.$$

Si l'on y regarde x, y, z comme connus, ses trois racines seront u, $-v$, $-w$, et on en conclura

$$u - v + w = e - 2x,$$
$$uvw = ey^2,$$

d'où

$$2x = v - w - u + e,$$
$$y\sqrt{e} = \sqrt{u}.\sqrt{v}.\sqrt{w}.$$

On aura ensuite sans difficulté

$$z\sqrt{e} = \sqrt{u - e}\,\sqrt{v + e}\,\sqrt{e - w}.$$

On a en définitive les trois formules de transforma-

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 164.

tion

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{v - w - u + e}{2}, \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{u}\,\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}}, \\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{u - e}.\sqrt{v + e}.\sqrt{e - w}}{\sqrt{e}}. \end{cases}$$

Voici quelques formules qui s'en déduisent. On a en différentiant

$$2dx = -du + dv - dw,$$

$$(3)\quad \begin{cases} 2dy = \dfrac{\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u}}\,du + \dfrac{\sqrt{u}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}\,\sqrt{v}}\,dv - \dfrac{\sqrt{u}\,\sqrt{v}}{\sqrt{e}.\sqrt{w}}\,dw, \\[3ex] 2dz = \dfrac{\sqrt{e + v}\,\sqrt{e - w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u - e}}\,du + \dfrac{\sqrt{u - e}\,\sqrt{e - w}}{\sqrt{e}.\sqrt{v + e}}\,dv \\[3ex] \qquad\qquad - \dfrac{\sqrt{u - e}.\sqrt{v + e}}{\sqrt{e}.\sqrt{e - w}}\,dw. \end{cases}$$

Si l'on fait varier séparément u, v, w, on en déduira les différentielles des trois lignes de courbure qui résultent des intersections des surfaces prises deux à deux ; il suffira d'ajouter les carrés des valeurs précédentes où l'on conserve successivement les termes qui contiennent du, dv, dw, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} ds_u = \dfrac{\sqrt{u + v}.\sqrt{u - w}}{\sqrt{u}.\sqrt{u - e}}\cdot du = U\,du, \\[3ex] ds_v = \dfrac{\sqrt{u + v}.\sqrt{v + w}}{\sqrt{v}.\sqrt{v + e}}\cdot dv = V\,dv, \\[3ex] ds_w = \dfrac{\sqrt{u - w}.\sqrt{v + w}}{\sqrt{w}\,\sqrt{e - w}}\cdot dw = W\,dw. \end{cases}$$

Pour un arc de courbe quelconque dans l'espace, on aura

$$(5)\quad ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + ds_w^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2 + W^2\,dw^2.$$

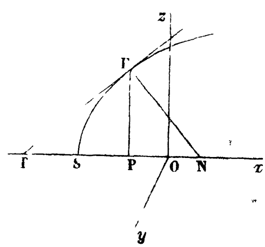
III.

Des ombilics et des sections circulaires.

On sait que le paraboloïde elliptique a deux ombilics situés dans le plan zOx de la parabole de moindre paramètre en deux points symétriques où la tangente à la courbe fait avec l'axe des x un angle défini par la relation

$$\tag{6} \operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{u-e}{e}}.$$

Soit F un de ces points, FT la tangente, FN la normale,



FP la coordonnée z. La parabole SF a pour équation

$$\frac{z^2}{u-e} = u + 2x,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\mathrm{FTN} = \operatorname{tang}\mathrm{NFP} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{FP}} = \frac{u-e}{z},$$

et à cause de la valeur précédente de $\operatorname{tang}\theta$, on aura pour l'ombilic

$$\tag{7} \mathrm{FP} = \sqrt{e(u-e)}.$$

Il sera encore utile, par la suite, de remarquer que la même figure donne pour la normale

$$\tag{8} \mathrm{R} = \mathrm{FN} = \frac{\mathrm{FP}}{\cos\theta} = \sqrt{u(u-e)},$$

et pour l'abscisse de l'ombilic

$$(9) \qquad -x = \mathrm{OP} = \frac{u-e}{2}.$$

Ainsi les coordonnées de l'ombilic seront

$$(10) \qquad x = -\frac{u-e}{2}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{u(u-e)}.$$

Si l'on remonte aux valeurs de y et de z (2), on en conclura, en les identifiant aux valeurs précédentes, que pour les ombilics on a

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Enfin nous aurons à considérer une sphère ayant pour centre le pied v de la normale à l'ombilic et pour rayon cette normale elle-même. On peut encore la définir en disant qu'elle est tangente au paraboloïde en ses deux ombilics. Nous conviendrons de l'appeler *sphère focale*, ce qui sera justifié par ses propriétés.

Nous rappellerons encore que les sections circulaires du paraboloïde sont parallèles au plan tangent de la surface à l'ombilic.

IV.

De la courbure du paraboloïde elliptique.

Nous commencerons l'étude du paraboloïde par les propriétés relatives à sa courbure.

Soient

$$(11) \qquad \begin{cases} X - x + p(Z-z) = 0, \\ Y - y + q(Z-z) = 0, \end{cases}$$

les équations d'une normale, et

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dv} + p\dfrac{dz}{dv} - (Z-z)\dfrac{dp}{dv} = 0, \\[2mm] \dfrac{dy}{dv} + q\dfrac{dz}{dv} - (Z-z)\dfrac{dq}{dv} = 0, \end{cases}$$

les équations de la normale infiniment voisine quand on se déplace suivant la ligne de courbure $w =$ constante.

On trouvera sans difficulté

$$\frac{dx}{dv} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dz}{dv} = \frac{\sqrt{u-e}\,\sqrt{e-w}}{2\sqrt{e}.\sqrt{v+e}},$$

$$p = \frac{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}{\sqrt{v+e}.\sqrt{e-w}}, \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}{2(v+e)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{e-w}}.$$

La première des équations (12) devient alors

$$1 + \frac{u-e}{v+e} + \frac{Z-z}{z} \cdot \frac{u-e}{v+e} = 0 \ (*),$$

on en déduira $Z - z$; on aura de même $X - x$, $Y - y$, ce qui donne le système

$$(13) \quad \begin{cases} X - x = u + v, \\ Y - y = -\dfrac{u+v}{u} \cdot y, \\ Z - z = -\dfrac{u+v}{u-e} \cdot z, \end{cases}$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point M de la surface et X, Y, Z celles du centre de courbure correspondant. Par l'élimination de x, y, z, on trouvera

$$(14) \quad \begin{cases} X = \dfrac{u + 3v - w + e}{2}, \\ Y = -\dfrac{v\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u}}, \\ Z = -\dfrac{(v+e)\sqrt{v+e}.\sqrt{e-w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}. \end{cases}$$

Pour le rayon de courbure lui-même on aura

$$R_v = (Z - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

(*) *Voir* l'équation (2).

on trouvera

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{e}.\sqrt{u+v}.\sqrt{u-w}}{\sqrt{u}.\sqrt{e+v}.\sqrt{e-w}},$$

on en conclura la valeur de R_v, on aura de même la valeur du second rayon de courbure R_w, c'est-à-dire

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} R_v &= \frac{(u+v)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{u-w}}{\sqrt{u}.\sqrt{u-e}},\\ R_w &= \frac{(u-w)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{u+v}}{\sqrt{u}.\sqrt{u-e}}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait avoir le lieu des centres de courbure, il suffirait d'éliminer v et w des équations (14), ce qui se ferait sans difficulté. Mais il sera plus simple de définir cette nappe de courbure par deux séries de lignes dont les unes correspondent à $v=$ constante et les autres à $w=$ constante, c'est-à-dire aux deux systèmes des lignes de courbure du paraboloïde.

Si l'on élimine w, on trouve

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{uY^2}{v^2}+\frac{u-e}{(e+v)^2}Z^2 = 2X-u-2v,\\ &\frac{u^2Y^2}{v^3}+\frac{(u-e)^2}{(e+v)^3}Z^2 = 2u+3v-2X,\end{aligned}\right.$$

équations qui expriment que les lignes de la nappe de courbure qui correspondent à l'hypothèse $v=$ constante, résultent de l'intersection de deux paraboloïdes ayant même axe que le paraboloïde proposé. De plus, en éliminant successivement X, Y, Z, on reconnaît que ces courbes se projettent suivant des ellipses sur le plan des YZ et suivant des paraboles sur les deux autres plans.

Si au contraire on élimine v des équations (14), on aura les trois équations

$$
(17)\quad \begin{cases}
\left(\dfrac{u-e}{e-w}\right)^{\frac{1}{3}}.Z^{\frac{2}{3}} - \left(\dfrac{u}{w}\right)^{\frac{1}{3}}.Y^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}, \\
3\left(\dfrac{eu}{w}\right)^{3} Y^{\frac{2}{3}} = 2X - u + w - e, \\
3\left[\dfrac{e(u-e)}{e-w}\right]^{\frac{1}{3}}.Z^{\frac{2}{3}} = 2X - u + w + 2e,
\end{cases}
$$

qui expriment que les projections des lignes du second système seront des développées d'hyperbole sur le plan des YZ et des développées de paraboles sur les deux autres plans.

Au sujet des rayons de courbure, on peut remarquer que l'on a

$$
(18)\qquad \frac{R_v^3}{R_w} = \frac{(u+v)^4}{u(u-e)}, \qquad \frac{R_w^3}{R_v} = \frac{(u-w)^4}{u(u-e)}.
$$

D'où l'on conclut que le premier rapport reste constant tout le long d'une même ligne de courbure $v =$ constante, et le second tout le long d'une ligne de courbure $w =$ constante. Cette relation, qui a été démontrée par M. Ossian Bonnet pour les surfaces du second degré à centre, se conserve donc pour les paraboloïdes.