

G. WIART

Solution de la question 478

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 283-285

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__283_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

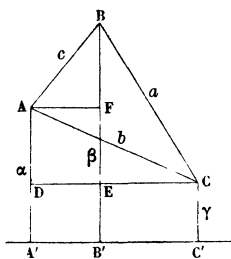
SOLUTION DE LA QUESTION 478

(voir t. XVIII, p. 171) ;

PAR M. G. WIART,

Élève du lycée de Douai (classe de M. David).

A, B, C, trois points fixes ; $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$;



α , β , γ , distances respectives des trois points à une droite fixe : on a

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma - (c^2 + a^2 - b^2)\gamma\alpha = 4S^2,$$

$S =$ aire du triangle ABC (Salmon).

Soient

$$AA' = \alpha, \quad BB' = \beta, \quad CC' = \gamma,$$

on a

$$\text{surf. } AA' C' CB = \frac{1}{2} (\beta + \gamma) B' C' + \frac{1}{2} (\beta + \alpha) A' B',$$

$$\text{surf. } AA' C' C = \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) B' C' + \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) A' B',$$

d'où, en retranchant, on tire

$$2S = (\beta - \alpha) B' C' + (\beta - \gamma) A' B'.$$

Élevant les deux membres au carré, il vient

$$4S^2 = (\beta - \alpha)^2 \overline{B' C'}^2 + (\beta - \gamma)^2 \overline{A' B'}^2 + 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \\ \times B' C' \times A' B'.$$

Par C, je mène une parallèle à A'C'; dans le triangle rectangle ADC, on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = (A' B' + B' C')^2,$$

ou

$$(1) \quad \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{A' B'}^2 - \overline{B' C'}^2 = 2 A' B' \times B' C'.$$

Par les points A et C, je mène des parallèles à A'C' et dans les triangles ABF, BEC ainsi formés, on a

$$\overline{AF}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{A' B'}^2 = c^2 - (\beta - \alpha)^2,$$

et

$$\overline{EC}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{B' C'}^2 = a^2 - (\beta - \gamma)^2.$$

Je porte dans (1) ces valeurs de $\overline{A' B'}^2$ et $\overline{B' C'}^2$ et je remplace AC et AD par leur valeur, on a

$$\bullet \quad b^2 - (\alpha - \gamma)^2 - [c^2 - (\beta - \alpha)^2] - [a^2 - (\beta - \gamma)^2] = 2A'B' \times B'C',$$

ou, toute réduction faite,

$$b^2 - c^2 - a^2 + 2(\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\alpha - \beta\gamma) = 2A'B' \times B'C'.$$

On remarque ici que $(\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\alpha - \beta\gamma)$ est égal au produit $(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)$. Je remplace maintenant dans l'expression de $4S^2$, $2A'B' \times B'C'$ par sa valeur trouvée et je remplace $\overline{B'C'}^2$, $\overline{A'B'}^2$ par leur valeur, on obtient

$$4S^2 = (\beta - \alpha)^2 [a^2 - (\beta - \gamma)^2] + (\beta - \gamma)^2 [c^2 - (\beta - \alpha)^2] \\ + (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) [b^2 - a^2 - c^2 + 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)],$$

ou

$$4S^2 = a^2(\beta - \alpha)^2 + c^2(\beta - \gamma)^2 + (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(b^2 - a^2 - c^2).$$

En effectuant les calculs et les réductions et disposant les termes convenablement, on arrive à la relation

$$a^2a^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma \\ - (a^2 + c^2 - b^2)\alpha\gamma = 4S^2.$$

C. Q. F. D.