NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HONORÉ PRAT

Solution des questions 517, 518, 519 et 520

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 235-247

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__235_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 517, 518, 519 ET 520

(voir p. 95 et 96) ;

PAR M. HONORÉ PRAT (*),
Élève de l'institution Royé-Micé à Bordeaux.

Solution de la question 517.

1°. L'équation de la normale est

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{c^2 y'}{b^2}.$$

Je cherche les intersections de cette droite avec les axes; j'obtiens

$$y = \frac{-c^2 y'}{b^2}, \quad x = \frac{c^2 x'}{a^2}.$$

(*) Résolues également par MM. L. Marc, élève du lycée de Caen, Ed. Gressier, élève du collége Stanislas, Jules Faure, élève de l'institution Meyer.

Le segment intercepté par les deux axes a pour expression

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{c^4 y'^2}{b^4} + \frac{c^4 y'^2}{a^4}} = \frac{c^2}{a^2 b^2} \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}.$$

La tangente a pour équation

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2.$$

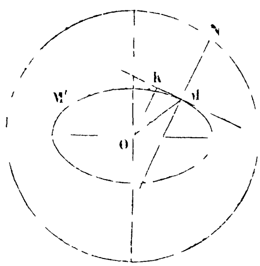
La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre est

$$(2) \qquad \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}.$$

En multipliant l'équation (1) par l'équation (2), on obtient un produit constant c^2.

2°. Si l'on joint le point O aux points M et N et si l'on

Fig. 1.



mène le diamètre M'O parallèle à la tangente, en désignant par θ l'angle M'OM, on a dans le triangle OMN

$$(a+b)^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 - 2\,OM.MN \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right),$$

MN est normale.

Mais, M'O et OM formant un système de diamètres conjugués, on sait que

$$(a+b)^2 = \overline{OM}^2 + \overline{M'O} - 2\,OM.MN \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right);$$

donc

$$MN = OM',$$

c'est-à-dire le demi-diamètre parallèle à la tangente. On trouve aisément que OM′ a pour expression $\frac{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{ab}$ en cherchant l'intersection de la droite $y = -\frac{b^2x'}{}, x$ avec l'ellipse.

La multiplication de OM′ par $p = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}$ donne la constante ab.

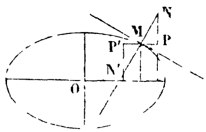
Solution de la question 518 (*).

Soient x et y les coordonnées des points N et N′, et

$$MN = MN' = \frac{K^2\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{a^2b^2},$$

où K^2 est la quantité constante.

FIG. 2.



Il est évident sur la figure que

$$x = x' \pm MN \cos NMP,$$

$$y = y' \pm MN \sin NMP,$$

x' et y' sont les coordonnées de M,

Eu remplaçant MN par sa valeur, et cos NMP, sin NMP

(*) Cette question a éte aussi resolue par M. L. Blanché-Arnault, élève du lycée Louis-le-Grand.

par leurs valeurs $\frac{a^2 y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}$ et $\frac{b^2 x'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}$, on obtient

$$(1)\quad x = x' \pm \frac{K^2 x'}{a^2} = \frac{(a^2 \pm K^2) x'}{a^2},\quad \text{d'où}\quad x' = \frac{a^2 X}{a^2 \pm K^2},$$

$$(2)\quad y = y' \pm \frac{K^2 y'}{b^2} = \frac{(b^2 \pm K^2) y'}{b^2},\quad \text{d'où}\quad y' = \frac{b^2 y}{b^2 \pm K^2}.$$

Substituant x', y' dans

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

on a

$$(3)\qquad \frac{a^2 x^2}{(a^2 \pm K^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 \pm K^2)^2} = 1.$$

L'équation (3) représente deux ellipses confocales, comme il est facile de s'en assurer en formant les différences des carrés des deux axes.

Solution de la question 519.

Soient (x', y'), $\left(\frac{a'}{a} x', \frac{b'}{b} y'\right)$ deux points correspondants, (x_1, y_1) les coordonnées du milieu M.

On a

$$(1)\qquad x_1 = \frac{x' + \frac{a'}{a} x'}{2} = \frac{(a + a') x'}{2a},$$

$$(2)\qquad y_1 = \frac{(b + b') y'}{2b}.$$

Pour avoir le lieu des points M, je remplace x' et y' par leurs valeurs tirées de l'équation (1) et (2) dans

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

J'obtiens

$$(3)\qquad \frac{4x_1^2}{(a+a')^2}+\frac{4y_1^2}{(b+b')^2}=1,$$

équation d'une ellipse.

La droite

$$y-y'=\frac{\dfrac{b'}{b}y'-y'}{\dfrac{a'}{a}x'-x'}(x'-x')$$

est normale à cette ellipse. En effet, si on remplace x' et y' par leurs valeurs, on a

$$y-\frac{2by_1}{b+b'}=\frac{(b'-b)(a+a')}{(a'-a)(b+b')}\frac{y_1}{x_1}\left(x-\frac{2ax_1}{a+a'}\right).$$

En tenant compte de la relation $a^2-b^2=a'^2-b'^2$ qui exprime que les ellipses données sont homofocales, on a

$$y=\frac{(a+a')^2}{(b+b')^2}\frac{y_1}{x_1}x+\frac{2by_1}{b+b'}-\frac{2ay_1(a+a')}{(b+b')^2},$$

ou enfin

$$(4)\qquad y=\frac{(a+a')^2}{(b+b')^2}\frac{y_1}{x_1}x-\frac{c'^2y_1}{(b+b')^2},$$

c'^2 étant égal à $(a+a')^2-(b+b)^2$.

Cette équation (4) est précisément celle de la normale à l'ellipse (3) au point (x_1, y_1), comme il est facile de s'en assurer en la formant directement.

Solution de la question 520.

Correction. ms_1 doit être pris égal au demi-diamètre, parallèle à la tangente et non à la normale.

Il faut démontrer l'égalité

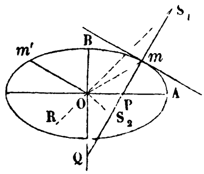
$$(1)\qquad PS_2\times QS_1=PS_1\times QS_2.$$

On a

$$PS_2 = (mS_2 - Pm), \quad QS_1 = (mS_2 + Qm),$$

$$PS_1 = (mS_2 + Pm), \quad QS_2 = (Qm - mS_2).$$

Fig. 3.



En remplaçant dans l'égalité (1), on obtient

$$(mS_2 - Pm)(mS_2 + Qm) = (mS_2 + Pm)(Qm - mS_2),$$

ou bien

$$(2) \qquad \overline{mS_2}^2 = Pm \, . \, Qm.$$

Or

$$\overline{mS_2}^2 = \overline{m'O}^2 = \frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{a^2 b^2},$$

$$Pm = \sqrt{\left(x' - \frac{c^2 x'}{a^2}\right)^2 + y'^2} = \frac{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}{a^2};$$

de même

$$Qm = \frac{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}{b^2}.$$

En substituant, on voit que l'égalité (2) est vérifiée.

C. Q. F. D.

Les lieux de S_1 et S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse décrits avec les rayons $(a \pm b)$. On peut le démontrer directement ou considérer la question comme un cas particulier de la question 518.

Dans l'équation

$$\frac{a^2x^2}{(a^2 \pm K^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2 \pm K^2)^2} = 1 \quad \text{(voir } solution \text{ 518)},$$

il suffit de faire

$$K^2 = ab,$$

et on obtient

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2.$$

C. Q. F. D.

Remarque. La question n'est qu'un corollaire du problème de la détermination des axes d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle.

On sait, en effet, que les axes OA et OB sont les bissectrices de S_2OS_1 et S_2OR, angles intérieur et extérieur du triangle S_2OS_1. Donc les quatre points Q, S_2, P, S_1, divisent harmoniquement le côté QS_1.

On sait aussi que OS_1 est égal à $(a+b)$ et OS_2 à $(a-b)$. Donc les points S_1 et S_2 sont sur les cercles décrits du centre avec $(a+b)$ ou $(a-b)$ pour rayon.

Note. Ces questions ont été résolues pour l'ellipsoïde, par M. Jules Faure, élève de l'institution Mayer.

Ellipsoïde.

1°. Le segment intercepté sur une normale quelconque à un ellipsoïde par deux des plans principaux étant multiplié par la distance p du centre au plan tangent adjacent à la normale, donne un produit constant.

Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes, en un point x, y, le plan tangent a pour équation

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Au même point, les équations de la normale sont :

$$a^2\frac{X-x}{x}=b^2\frac{Y-y}{y}=c^2\frac{Z-z}{z},$$

au point où la normale perce le plan zoy pour

$$X=0,\quad Y=y\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right),\quad Z=z\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right);$$

au point où elle perce ZoX pour

$$Y=0,\quad X=x\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right),\quad Z=z\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right).$$

La distance de ces deux points est

$$\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^3+y^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)^2+z^2\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)(a^2-b^2)^2};$$

la distance de l'origine au plan tangent,

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le produit de ces distances $=a^2-b^2$.

De même, si l'on avait pris le segment de la normale compris entre zox et xoy, le produit aurait été

$$b^2-c^2.$$

Enfin, si l'on avait considéré le segment compris entre xoy et yoz, ce produit aurait été

$$a^2-c^2.$$

2°. Pour l'ellipsoïde, si l'on prolonge une normale quelconque à un ellipsoïde dont les axes sont $2a$, $2b$, $2c$, jusqu'à un ellipsoïde de révolution de mêmes plans principaux, dont les axes sont, par exemple, $2(a+b)$ pour les deux axes situés dans xoy, $2\left(c+\frac{ab}{c}\right)$ pour celui qui est dirigé suivant oz, le produit du segment de la normale compris entre les deux ellipsoïdes par la perpendiculaire p abaissée du centre sur le plan tangent adjacent à la normale est constant.

En suivant la même marche que pour l'ellipse, on arrive à une équation en k

$$\frac{x^2\left(1+\frac{k}{a^2}\right)}{(a+b)^2}+\frac{y^2\left(1+\frac{k}{b^2}\right)}{(a+b)^2}+\frac{z^2\left(1+\frac{k}{c^2}\right)}{\left(c+\frac{ab}{c}\right)}=1,$$

qui est vérifiée pour $k=ab$, h étant le produit cherché.

Dans le cas où l'ellipsoïde proposé serait de révolution, par exemple pour $a=c$, le second ellipsoïde deviendrait une sphère de rayon $a+b$.

Même résultat en prenant $a-b$, $c-\frac{ab}{c}$ pour axes.

3°. Si l'on porte sur une normale quelconque à un ellipsoïde, de part et d'autre de son origine, deux longueurs MN_1, MN_2 telles, que le produit de MN_1 ou de MN_2 par p soit constant, les lieux des points N_1, N_2 sont deux ellipsoïdes confocaux de même centre que l'ellipsoïde donné.

En suivant la même marche que pour l'ellipse, on trouve pour équations de ces deux lieux

$$\frac{X^2}{\left(a\pm\frac{k}{a}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(b\pm\frac{k}{b}\right)^2}+\frac{Z^2}{\left(c\pm\frac{k}{c}\right)^2}=1.$$

On voit d'ailleurs que pour $k=ab$, on trouve les deux ellipsoïdes de révolution indiqués plus haut, qui deviennent des sphères si $c = a$ ou b.

4°. *Ellipse.* Soient P, Q, les intersections respectives d'une normale par les axes a, b; si à partir de l'origine M de la normale on porte des longueurs égales entre elles MS_1, MS_2, telles que MS_1 soit égale au demi-diamètre parallèle à la tangente adjacente à cette normale, les quatre points S_1, P, S_2, Q, sont placés harmoniquement; les lieux de S_1, S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse, de rayons $a + b$.

La tangente à un point x, y de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour coefficient angulaire $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$, le diamètre parallèle est

$$Y = -\frac{b^2 x}{a^2 y} X, \tag{1}$$

les coordonnées X, Y de son intersection avec l'ellipse vérifient aussi

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Des équations (1), (2), on tire

$$X^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^4 y^2} \right) = 1,$$

$$X^2 = \frac{a^4 y^2}{a^2 y^2 + b^2 x^2} = \frac{a^2 b^2 \frac{y^2}{b^4}}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}};$$

de même

$$Y^2 = \frac{a^2 b^2 \frac{x^2}{a^4}}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}},$$

et

$$X^2 + Y^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

Tel est le carré de la longueur du demi-diamètre. Les coordonnées des points S_1, S_2, satisferont l'équation de la normale

$$(3) \qquad \frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y}{\frac{y}{b^2}}.$$

On aura en outre, puisque $MS_1 = MS_2 =$ le demi-diamètre

$$(4) \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y_2}{b^4}\right).$$

De ces équations on déduit

$$(X - x)^2 \left(1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^4}\right) = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right),$$

d'où

$$X = x\left(1 \pm \frac{b}{a}\right);$$

de même

$$Y = y\left(1 \pm \frac{a}{b}\right),$$

pour P

$$X = x\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \quad Y = 0,$$

pour Q

$$X = 0, \quad Y = y\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

par conséquent

$$\overline{S_1P}^2 = x^2 \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]^2 + y^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)^2$$
$$= b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)(a + b)^2,$$

et

$$\overline{S_2P}^2 = x^2\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^2 + y^2\left(1+\frac{a}{b}\right)^2$$
$$= b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a-b)^2,$$

de même

$$\overline{S_1Q}^2 = x^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 - y^2\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^2$$
$$= a^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a+b)^2,$$
$$\overline{S_2Q}^2 = x^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 - y^2\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^2$$
$$= a^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a-b)^2,$$
$$\frac{S_1P}{S_1Q}=\frac{S_2P}{S_2Q}=\frac{b}{a}.$$

Les deux points S_1, S_2, divisent la ligne P, Q dans le même rapport, par conséquent S_1, P, S_2, Q sont placés harmoniquement; car en admettant un sens positif et un sens négatif sur la normale, comme P_2 est entre P et Q, S_2P sera de sens contraire des autres longueurs. On aura donc

$$\frac{S_1P}{S_1Q}:\frac{S_2P}{S_2Q}=-1.$$

S_2 est entre P et Q, car

$$MP=\frac{b^4}{a^4}x^2+y^2,$$
$$MS_2 = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=MP\times\frac{a^3}{b^2},$$
$$MS_1 = MS = ab\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)}.$$

Or, la longueur du segment de normale intercepté par le cercle de rayon $a \pm b$ est aussi $\pm ab \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$, donc les lieux de S_n, S_2, sont ces deux circonférences. Pour l'ellipsoïde, on prend MS_1 égal à un demi-diamètre, quatrième proportionnelle de μ; et par exemple a, b, et au lieu du cercle, l'ellipsoïde de révolution $a + b$ a été $\frac{c^2 + ab}{i}$.

M. Saphore, élève du lycée de Douai, a résolu de même ces diverses questions.