

ED. GRESSIER

## Solution de la question 514

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 230-233

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_230\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__230_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTION DE LA QUESTION 514

(voir p. 94); •

PAR M. ED. GRESSIER,

Élève au collège Stanislas (classe de M. Frin).

---

L'énoncé de cette question est incorrect. Il faut remplacer

$$b = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi} \quad \text{par} \quad b = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi},$$

et

$$b = \operatorname{cot} \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi} \quad \text{par} \quad b = \operatorname{cot} \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi} \quad (*).$$

Nous allons le prouver

Pour qu'une équation transcendante

$$f(x) = 0$$

ait deux racines égales, il faut qu'elle ait une racine commune avec

$$f'(x) = 0.$$

Prenons la dérivée de l'équation proposée.

$$e^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} + xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} \left[ -\frac{a}{2} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = 0,$$

d'où

$$ax^2 - 2x + a = 0.$$

---

(\*) Nous avons copié les *Comptes rendus* du 9 janvier 1860, p. 111-112.

( 231 )

Cette équation a pour racines

$$\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a},$$

ou, puisque  $a = \sin \psi$ ,

$$\cot \frac{\psi}{2} \quad \text{et} \quad \tan \frac{\psi}{2}.$$

Il faut donc que l'une de ces quantités mise à la place de  $x$  dans les équations

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \tan \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi},$$

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \cot \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi},$$

en vérifie au moins une.

Posons

$$x_1 = \cot \frac{\psi}{2}, \quad x_2 = \tan \frac{\psi}{2};$$

alors

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{2 \cos \psi}{\sin \psi}, \quad x_2 - \frac{1}{x_2} = -\frac{2 \cos \psi}{\sin \psi}.$$

Il faut donc que l'une des relations suivantes se vérifie :

$$(1) \quad x_1 e^{-\frac{a}{2}\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)} = \tan \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi},$$

$$(2) \quad x_1 e^{-\frac{a}{2}\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)} = \cot \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi},$$

$$(3) \quad x_2 e^{-\frac{a}{2}\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)} = \tan \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi},$$

$$(4) \quad x_2 e^{-\frac{a}{2}\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)} = \cot \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi}.$$

or ces relations se réduisent à

$$(5) \quad \cot \frac{\psi}{2} = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2},$$

$$(6) \quad e^{-\cos \psi} = e^{\cos \psi},$$

$$(7) \quad e^{\cos \psi} = e^{-\cos \psi},$$

$$(8) \quad \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} = \cot \frac{\psi}{2}.$$

Pour que l'équation (5) ou l'équation (8) soit satisfaite, il faut que

$$\psi = 90^\circ;$$

et de même, pour que l'équation (6) ou l'équation (7) soit satisfaite, il faut que

$$\psi = 90^\circ.$$

Mais, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé de la question,  $\psi$  est inférieur à 90 degrés. L'équation transcendante proposée ne saurait donc avoir deux racines égales.

Au contraire, si l'on pose

$$b = \operatorname{tang} \frac{x}{2} e^{\cos \psi},$$

la valeur

$$x = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}$$

annule à la fois l'équation transcendante proposée et sa dérivée, et par suite l'équation

$$x e^{-\frac{a}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right)} = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} e^{\cos \psi}$$

à deux racines égales à  $\operatorname{tang} \frac{\psi}{2}$ .

De même, en posant

$$b = \cot \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi},$$

l'équation

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \cot \frac{\psi}{2} e^{-\cos \psi}$$

a deux racines égales à  $\frac{\psi}{2}$ .