

ARTHUR LESCAZE

**Propositions segmentaires sur la parabole,
l'hyperbole équilatère et propriété du
cercle principal de l'ellipse**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 225-230

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__225_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPOSITIONS SEGMENTAIRES

sur la parabole, l'hyperbole équilatère et propriété du cercle principal de l'ellipse;

PAR M. ARTHUR LESCAZE,
Elève à Sainte-Barbe (cours de M. Gerono).

PROPOSITION I. *Le produit des distances du sommet d'une parabole à une tangente quelconque et à la courbe, distances comptées sur la même droite, est constant.*

Soient

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet S;

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente quelconque en fonction de son coefficient angulaire m ;

$$y = -\frac{1}{m}x$$

l'équation de la perpendiculaire SP abaissée du sommet S sur la tangente. Enfin, soit R le second point de rencontre de SP prolongée avec la courbe. Cela posé, on a

$$(1) \quad \overline{SP}^2 = \frac{p^2}{4m^2(m^2+1)},$$

d'après la formule connue qui donne la distance d'un point S à une droite.

Nommons (x', y') les coordonnées du point R. On

aura

$$\overline{SR}^2 = x'^2 + y'^2; \quad y' = -\frac{1}{m} \cdot x'; \quad y'^2 = 2px';$$

éliminant x' et y' , il viendra

$$(2) \quad \overline{SR}^2 = 4p^2 m^2 (m^2 + 1).$$

Multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre et extrayons la racine carrée, il vient

$$SP \times SR = p^2. \quad (\text{C. Q. F. D.})$$

Remarque I. Cette remarque peut être utile dans la résolution de certains problèmes. Soit proposé, par exemple, de construire une parabole dont on donne une tangente, le sommet et le paramètre. On aura immédiatement un point R de la courbe, en abaissant du sommet donné S une perpendiculaire SP sur la tangente et déterminant le point R de façon que

$$SP \times SR = p^2.$$

On sera alors ramené à cet autre problème dont la solution est connue et fort simple : Construire une parabole, connaissant le sommet, le paramètre et un point de la courbe.

Remarque II. Il y a une démonstration plus simple de la proposition. Le lieu du point P est, comme on sait, une cissoïde dont l'équation est

$$y^2 = -\frac{2x^3}{p + 2x};$$

passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\rho = -\frac{p \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha};$$

l'équation polaire de la parabole est

$$\rho = \frac{2p \cos \alpha}{\sin^2 \alpha};$$

le produit des deux rayons vecteurs ρ est $-p^2$.

Note du Rédacteur. M. Lescaze est l'ingénieur auteur du *Lemme* qu'il a proposé comme question (voir t. XVIII, p. 171), et qui a été démontré par M. Joseph Vigne (voir t. XVIII, p. 265).

PROPOSITION II. *Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à une tangente quelconque et à la courbe, distances comptées sur la même droite, est constant.*

Soit en effet

$$x^2 - y^2 = a^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes. Je désigne son centre par O, par P la projection de ce centre sur une tangente quelconque et par R l'un des deux points de rencontre de OP avec la courbe.

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 - a^2} = mx + a \sqrt{m^2 - 1}$$

étant l'équation d'une tangente quelconque à la courbe, on a

$$(1) \quad \overline{OP}^2 = \frac{a^2(m^2 - 1)}{(m^2 + 1)}.$$

Cherchons \overline{OR}^2 , nommons x', y' les coordonnées du point R, on aura

$$\overline{OR}^2 = x'^2 + y'^2;$$

d'ailleurs

$$x'^2 - y'^2 = a^2 \quad \text{et} \quad y' = -\frac{1}{m} \cdot x'.$$

Tirons x'^2 et y'^2 de ces deux dernières expressions et portons dans

$$\overline{\text{OR}}^2 = x'^2 + y'^2,$$

il viendra

$$\overline{\text{OR}}^2 = \frac{a^2 m^2}{m^2 - 1} + \frac{a^2}{m^2 - 1} = \frac{a^2(m^2 + 1)}{m^2 - 1};$$

$$(2) \quad \overline{\text{OR}}^2 = \frac{a^2(m^2 + 1)}{m^2 - 1};$$

multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre et extrayons la racine, il viendra

$$\text{OP} \times \text{OR} = a^2. \quad (\text{c. Q. F. D.})$$

Remarque. Le lieu du point P est une lemniscate dont l'équation polaire est

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\alpha,$$

l'équation polaire de l'hyperbole est

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha},$$

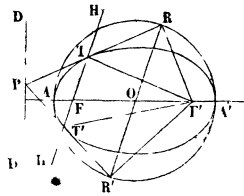
donc, etc.

PROPOSITION III. *Si d'un point de la directrice d'une ellipse on tire deux tangentes à la courbe et qu'on les prolonge au delà du point de contact jusqu'à leur rencontre avec la circonférence principale, la droite qui joindra les deux points de rencontre sera un diamètre parallèle à la corde des contacts.*

Lemme. Les projections du sommet d'un triangle sur les bissectrices correspondant aux deux autres sommets sont situées sur une droite qui passe par les milieux des deux côtés se coupant au sommet considéré.

Cela posé, joignons sur la figure TT' , TF' , $\text{T}'\text{F}'$, $\text{F}'\text{R}$, $\text{F}'\text{R}'$

La droite TT' passé par le foyer F , puisque le point P est



sur la directrice ; donc on a les égalités d'angles

$$\widehat{RTF'} = \widehat{PTF} = \widehat{HTR}.$$

De même

$$F'\widehat{T'R'} = H'\widehat{T'R'}.$$

Donc les droites TR , $T'R'$ sont les bissectrices des angles $H\widehat{T'F'}$, $H'\widehat{T'F}$. Mais $F'R$ est perpendiculaire sur TR , $F'R'$ sur $T'R'$, puisque TR et $T'R'$ sont des tangentes à l'ellipse et que les points R et R' appartiennent à la circonférence principale. Donc, d'après le lemme, la droite RR' passe par les milieux de TF' et de $T'F$, ce qui montre d'abord qu'elle est parallèle à TT' , et en outre elle passera par le milieu O de FF' , c'est-à-dire qu'elle est un diamètre. (C. Q. F. D.)

On déduit de là les deux corollaires suivants :

Corollaire I. Si des extrémités d'un diamètre mobile de la circonférence principale on mène d'un même côté de ce diamètre des tangentes à l'ellipse, le point de concours de ces tangentes décrit la directrice correspondant au foyer relatif au côté considéré.

Corollaire II. Quand l'un des sommets d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse est assujéti à se mou-

(230)

voir sur l'une des deux directrices, le sommet opposé décrit l'autre directrice, et les deux autres sommets décrivent la circonférence principale.