

V. DE ZEIPEL

**Démonstration d'un théorème de M. Cayley
sur les relations entre les fonctions de Sturm**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 220-224

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__220_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Cayley sur les relations entre les fonctions de Sturm (*);

PAR M. V. DE ZEIPEL,
Doyen à l'université d'Upsal.

Quarterly Journal, mai 1859.

1°. Soient

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_n x^{m-n} \dots,$$

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + b_n x^{m-n} + \dots;$$

opérant comme pour la recherche du plus grand commun

(*) *Journal* de M. Liouville, t. XI, p. 297-299; 1846.

méthode de Cramer. A cet effet, posons

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}; \quad P'_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$P'_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \dots; \quad P_1^{(r)} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_{r+1} & b_{r+1} \end{vmatrix};$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Pour avoir $P_2^{(r)}$, on change dans P_2 la dernière ligne les indices en $r+3$; (r) désigne les accents.

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s & a_t & a_3 & b_s & b_t & b_3 \end{vmatrix};$$

et de là $P_s^{(r)}$ en changeant les indices en $r+s$ dans la dernière ligne.

Les P_s se forment en prenant dans chaque ligne des $2n-1$ équations s termes à partir de la seconde ligne.

On a donc

$$a_0 P_{n-1} A_0 = (-1)^n B_0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & b_4 & b_3 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & b_{2n-2} & b_{2n-3} & b_{2n-4} \end{vmatrix};$$

et, en général,

$$a_0 P_{n-1} A_i = (-1)^{n+1} B_0$$

$$\times \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_2 & \\ a_3 & a_2 & a_1 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_3 & \\ a_4 & a_3 & a_2 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1} & a_{i-2} & a_{i-3} \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_{i-1} & \\ a_i & a_{i-1} & a_{i-2} \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & b_i & \\ a_{i+1} & a_i & a_{i-1} \dots & a_1 & a_0 & 0 \dots & 0 & b_{i+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} \dots & a_{2n-(i+1)} & a_{2n-(i+2)} & a_{2n-(i+3)} \dots & a_n & b_{2n-2} & b_{2n-2} \end{vmatrix}$$

et

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} S.$$

Pour avoir S, on remplace dans le déterminant précédent la première ligne par $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \dots, 0, 0, 0$, et

$$\psi_n(x) = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} T;$$

pour avoir T, on remplace la même première ligne par $0, 0, 0, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \dots, +$; de là

$$R_n = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} U;$$

remplaçant la même ligne par

$$x^{n-1} F x, \quad x^{n-2} F(x), \quad x^{n-3} F(x), \dots, x^{n-1} f(x), \quad x^{n-2} f(x), \\ x^{n-3} f(x),$$

on obtient U.

Faisant

$$B_0 = \pm a_0 P_{(n-1)},$$

on a

$$R_n = \pm (-1)^{n+1} U;$$

mettant dans U au lieu de F (x), f(x) les développements, et ne conservant que les termes de degré m — n et inférieurs, on a

$$R_n = \pm (-1)^{n+1} P_n x^{m-n} + P'_n x^{m-n-1} + P''_n x^{m-n-2} + P'''_n x^{m-n-3} \dots,$$

n est quelconque; r, s, t étant des nombres entiers positifs, on trouve par le procédé ci-dessus les valeurs de

$$\begin{aligned} \varphi_r, \quad \varphi_s, \quad \varphi_t, \\ \psi_r, \quad \psi_s, \quad \psi_t, \\ R_r, \quad R_s, \quad R_t; \end{aligned}$$

on a identiquement les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_r & \psi_r & \varphi_r F(x) \\ \varphi_s & \psi_s & \varphi_s F(x) \\ \varphi_t & \psi_t & \varphi_t F(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_r & \psi_r & \psi_r f(x) \\ \varphi_s & \psi_s & \psi_s f(x) \\ \varphi_t & \psi_t & \psi_t f(x) \end{vmatrix} = 0;$$

ajoutant

$$\begin{vmatrix} \varphi_r & \psi_r & \varphi_r F(x) + \psi_r f(x) \\ \varphi_s & \psi_s & \varphi_s F(x) + \psi_s f(x) \\ \varphi_t & \psi_t & \varphi_t F(x) + \psi_t f(x) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} \varphi_r & \psi_r & R_r \\ \varphi_s & \psi_s & R_s \\ \varphi_t & \psi_t & R_t \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation découverte par M. Cayley.