

FRANÇOIS SIACCI

**Troisième solution de la question 493**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 216-220

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_216\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__216_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 493

(voir p 83);

PAR M. FRANÇOIS SIACCI (DE ROME).

Soient P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, Q le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP : on a CD égal au tiers du rayon de courbure de la développée en C.

(ABEL TRÁNSON.)

Soient  $\rho$  le rayon de courbure de la conique au point P, et R le rayon de courbure de la développée au point C; soit  $\varphi$  l'angle que la tangente au point P fait avec l'axe des  $x$ ; soient enfin  $s$  et S deux arcs pris à partir des points P et C sur la conique et sur la développée. Nous aurons

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}, \quad R = \frac{dS}{d\varphi};$$

mais  $d\rho = dS$ ; donc

$$R = \frac{\rho d\rho}{ds}.$$

Soit maintenant A l'angle que fait la tangente au point P avec le diamètre PO. On aura, le triangle PCD étant rectangle en C,

$$CD = CP \cot A = \rho \cot A.$$

La question, par conséquent, se réduit à démontrer l'équation

$$\frac{\rho d\rho}{ds} = 3\rho \cot A, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\rho}{ds} = 3 \cot A.$$

Soit en général

$$(1) \quad y^2 = Ax^2 + 2Bx$$

l'équation de la conique,  $\varepsilon$  étant l'angle des demi-axes. On

aura

$$(2) \quad \begin{cases} y' = \frac{Ax + B}{y}, \\ y'' = \frac{Ay^2 - (Ax + B)^2}{y^3} = -\frac{B^2}{y^3}, \\ y''' = \frac{3B^2(Ax + B)}{y^4}. \end{cases}$$

Or

$$\rho = \frac{-(1 + y'^2 + 2y' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{y'' \sin \varepsilon},$$

$$ds = (1 + y'^2 + 2y' \cos \varepsilon)^{\frac{1}{2}} dx;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{-3}{\sin \varepsilon} \cdot \left[ (y' + \cos \varepsilon) - \frac{(1 + y'^2 + 2y' \cos \varepsilon) y''}{y'^2} \right],$$

et remplaçant  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  au moyen des équations (2), on aura, réductions faites,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{ds} = \frac{-3}{\sin \varepsilon} \\ \times \left\{ \frac{B^2[(Ax+B) + y \cos \varepsilon] - (Ax+B)[y^2 + (Ax+B)^2 + 2y(Ax+B) \cos \varepsilon]}{B^2 y} \right\} \end{array} \right\}.$$

Dans l'équation (1), l'origine des coordonnées se trouve sur un point de la courbe. Ce point, pouvant être quelconque, supposons que ce soit le point P. On aura

$$x = 0 \quad y = 0, \quad \varepsilon = A;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (3), on trouve, après avoir exécuté la division,

$$\frac{d\rho}{ds} = 3 \cot A,$$

C. Q. F. D.

# THÉORÈME DE M. DE STAUDT SUR LE TÉTRAÈDRE

(voir t. XVIII, p. 444);

PAR M. GENTIL,

Chef d'institution.

—

Nous conservons les mêmes notations; il faut démontrer que l'on a

$$6rV = \omega,$$

$$\Delta u = \omega,$$

( 218 ) et appelant  $\Delta'$  le triangle dont les côtés sont  $\frac{a}{\sqrt{u}}$ ,  $\frac{b}{\sqrt{u}}$ ,  $\frac{c}{\sqrt{c}}$ ,

$$\Delta = \Delta'.$$

En se reportant à la *Géométrie* non mutilée de Legendre, on trouve, Note V, problèmes VI et VIII, sur le tétraèdre,

$$(1) P = V = \frac{1}{6} fgh \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

$$(2) SO = r = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{f^2 \sin^2 \alpha + g^2 \sin^2 \beta + h^2 \sin^2 \gamma + 2fg(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) - 2fh(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) - 2gh(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)}}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}.$$

Le dénominateur de  $r$  est égal à  $\frac{6V}{fgh}$ ; chassant ce dénominateur dans l'équation (2), et multipliant les deux membres par  $fgh$ , on a

$$(3) \quad 6rV = \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2g^2h^2M\right)},$$

en appelant  $M$  la quantité sous le radical dans le numérateur de  $r$ .

En comparant les notations de Legendre avec celles de M. de Staudt, on voit que

$$\begin{aligned} a &= ff', & b &= gg', & c &= hh', \\ 2s &= ff' + gg' + hh', \\ \omega^2 &= s(s - ff')(s - gg')(s - hh'), \\ u &= 2vK, \end{aligned}$$

$K$  = la hauteur du tétraèdre correspondant à  $\Delta$ . (Legendre, livre III, théorème XXXII.)

Cela posé,

$$(4) \quad \omega^2 = \frac{1}{16} \left( \begin{array}{l} 2f^2f'^2g^2g'^2 + 2f^2f'^2h^2h'^2 + 2g^2g'^2h^2h'^2 \\ -f^4f'^4 - g^4g'^4 - h^4h'^4 \end{array} \right);$$

mais

$$\begin{aligned} f'^2 &= g^2 + h^2 - 2gh \cos \alpha, \\ g'^2 &= f^2 + h^2 - 2fh \cos \beta, \\ h'^2 &= f^2 + g^2 - 2fg \cos \gamma. \end{aligned}$$

Remplaçant dans l'équation (4)  $f'^2$ ,  $g'^2$ ,  $h'^2$ , par les valeurs précédentes, on trouve, après calcul fait, pour  $\omega^2$ , la quantité sous le radical dans le second membre de l'équation (3); donc,

$$6rV = \omega;$$

mais

$$V = \frac{1}{3} K \Delta, \quad 6rV = 2rK\Delta = \omega, \quad u = 2rK;$$

donc,

$$\Delta' u = \omega.$$

Le triangle  $\Delta'$  dont les côtés sont  $\frac{ff'}{\sqrt{u}}, \frac{gg'}{\sqrt{u}}, \frac{hh'}{\sqrt{u}}$ , a pour surface

$$(5) \frac{\sqrt{\frac{1}{16}(2f^2f'^2g^2g'^2 + 2f^2f'^2h^2h'^2 + 2g^2g'^2h^2h'^2 - f^4f'^4 - g^4g'^4 - h^4h'^4)}}{u} = \frac{\omega}{u}.$$

Donc

$$\Delta' u = \omega,$$

et, par conséquent,

$$\Delta = \Delta'.$$


---