Nouvelles annales de mathématiques

Ed. Dewulf

Note sur les fonctions symétriques des racines communes à deux équations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 18-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__18_0>

NOTE

Sur les fonctions symétriques des racines communes à deux équations;

PAR M. ED. DEWULF,
Capitaine du génie.

I. Dans un Mémoire inséré aux *Annales de Mathématiques* de Gergonne, Abel a donné un moyen de calculer une fonction quelconque d'une racine commune à deux équations. Ce procédé exige que les équations n'aient qu'une seule racine commune.

On peut ainsi calculer une fonction symétrique des racines communes à deux équations, quel que soit le nombre de ces racines, et par suite ces racines elles-mêmes.

II. Soient les deux équations

$$(1) \qquad f(y) = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

$$(2) \qquad \mathrm{F}(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

qui ont t racines communes et qui n'en ont pas d'autres.

Proposons-nous de calculer la fonction symétrique φ de ces t racines.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ les n racines de l'équation (2). En portant ces racines dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons ces n résultats

$$f(y_1), \quad f(y_2), \quad f(y_3), \ldots, f(y_n).$$

Les t premiers de ces résultats sont nuls, par hypothèse.

Faisons les produits $n-t$ à $n-t$ de ces résultats, et désignons, en général, par $\overset{k}{\mathrm{R}}_{\mu,\nu,\varpi\,..}$ le produit

$$\frac{f(y_1)f(y_2)f(y_3)\ldots f(y_n)}{f(y_\mu)f(y_\nu)f(y_\varpi\ldots},$$

le nombre des facteurs du dénominateur étant K.

Les quantités

$$R^t_{1.2.3\ldots t},\quad R^t_{1.2.3\ldots(t-1)(t+1)},\quad R^t_{1.2.3\ldots(t-1)(t+2)},$$

sont toutes nulles, excepté la première, qui ne contient aucun des facteurs nuls $f(y_1)$, $f(y_2)$, ..., $f(y_t)$; on a donc, identiquement,

$$R^t_{1.2.3\ldots t}+\varphi(y_1 y_2 y_3\ldots y_t)=R^t_{1.2.3\ldots t}+\varphi(y_1 y_2 y_3\ldots y_t)$$
$$+R^t_{1.2.3\ldots(t-1)(t+1)}+\varphi(y_1\ldots y_{t-1}y_{t+1})+\ldots,$$

ou, symboliquement,

$$R^t_{1.2.3\ldots t}\varphi(y_1 y_2\ldots y_t)=\sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}\varphi(y_\mu y_\nu y_\varpi\ldots),$$

l'indice $\overset{t}{\mu,\nu,\varpi\ldots}$ désignant une des combinaisons t à t des chiffres $1.2.3\ldots, n$.

On a de même, identiquement,

$$R^t_{1.2.3\ldots t}=\sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}.$$

Il résulte de ces deux identités, que

$$(3)\quad \varphi(y_1, y_2, y_3,\ldots, y_t)=\frac{\sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}\varphi(y_\mu, y_\nu, y_\varpi\ldots)}{\sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}}.$$

Cette expression est une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation (2). On peut donc la calculer par des méthodes connues.

III. Soit

$$(4)\qquad P_0 y^t+P_1 y^{t-1}+P_2 y^{t-2}+\ldots+P_t=0$$

l'équation qui donnerait les racines communes aux équations (1) et (2), et posons

$$R=f(y_1),\ f(y_2),\ f(y_3),\ldots,\ f(y_n).$$

Il est très-aisé de voir que

$$P_0 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots} = \frac{d^t R}{dp^t_m},$$

$$P_1 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu + y_\nu + y_\varpi + \ldots) = -\frac{t}{1}\frac{d^t R}{dp^{t-1}_m dp_{m-1}},$$

$$P_2 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu y_\nu + y_\mu y_\varpi + \ldots)$$

$$= + \frac{t(t-1)}{1.2}\frac{d^t R}{dp^{t-2}_m dp^2_{m-1}},$$

. . . .

$$P_t = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu \cdot y_\nu \cdot y_\varpi \ldots - \ldots) = (-1)\frac{d^t R}{dp^t_{m-1}}.$$

L'équation (4) peut donc s'écrire

$$\frac{d^t R}{dp^t_m}y^t - \frac{t}{1}\frac{d^t R}{dp^{t-1}_m dp_{m-1}}y^{t-1} + \frac{t(t-1)}{1.2}\frac{d^t R}{dp^{t-2}_m dp^2_{m-1}}y^{t-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^t \frac{d^t R}{dp^t_{m-1}} = 0.$$

Cette équation, déjà donnée par M Brioschi, se déduit ici d'une théorie générale.